

К.П.Станюкович, В.Н.Мельников

ГИДРОДИНАМИКА,
ПОЛЯ
И КОНСТАНТЫ
в теории гравитации

СНЕРГОАТОМИЗДАТ

К.П.Станюкович, В.Н.Мельников

**ГИДРОДИНАМИКА,
ПОЛЯ
И КОНСТАНТЫ**
в теории гравитации

МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1983

УДК 531.551

Станюкович К. П., Мельников В. Н. Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1983. 256 с.

Изложены результаты оригинальных исследований вопросов стандартной теории гравитации и ее обобщений. Основное внимание уделено применению методов механики сплошных сред в теории гравитации, выяснению роли гравитации в явлениях макро- и микромира, точным решениям в случае, когда среда — материя, задаваемая гидродинамическим тензором энергии-импульса, а также точным решениям для случая, когда среда — поле. Проанализированы обобщения ОТО, в частности, новая космологическая гипотеза, в основе которой лежит теория гравитационного вакуума. Проведены исследования по квантованию космологических моделей, эффектов спонтанного нарушения симметрии и рождения частиц в космологии. Предложена теория гравитации с фундаментальным хиггсовским полем, в рамках которой в атомной системе единиц удастся объяснить возможные вариации эффективной гравитационной связи, а в гравитационной — вариации масс всех частиц.

Для научных работников и аспирантов, специалистов в области теории гравитации, механики сплошных сред.

Табл. 3. Ил. 4. Библиогр. 175.

Рецензент Ю. С. В л а д и м и р о в

Кирилл Петрович Станюкович

Виталий Николаевич Мельников

ГИДРОДИНАМИКА, ПОЛЯ И КОНСТАНТЫ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Редактор *Е. В. Сатарова*

Переплет художника *О. В. Камаева*

Технический редактор *В. В. Хапаева*

Корректор *З. Б. Драновская*

ИБ № 425

Сдано в набор 16.07.82. Подписано в печать 18.12.82. Т-22392

Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная

Печать высокая. Усл. печ. л. 16,0. Усл. кр.отт. 16,0. Уч.-изд. л. 18,86

Тираж 2000 экз. Заказ 1061 Цена 3 р. 10 к.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома

при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46

С 1704020000—065
051(01)—83 289—82

© Энергоатомиздат, 1983

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге изложены некоторые вопросы теории гравитации, получившие наибольшее развитие за последние 10—15 лет, после выхода в 1965 г. монографии [1], которая способствовала, на наш взгляд, прогрессу в таких, в частности, направлениях, как связь теории гравитации с физикой микромира, обобщения теории гравитации Эйнштейна.

Большую роль в становлении этих направлений сыграли работы В. А. Фока и Д. Д. Иваненко, М. П. Бронштейна, Гупта, Дирака, де Витта, А. А. Соколова и Д. Д. Иваненко, Ю. С. Владимирова и др. Новый импульс в исследовании связи гравитационного и других физических полей дали работы [1], а также М. А. Маркова, Н. А. Черникова, Н. В. Мицкевича, Я. Б. Зельдовича и их учеников, а в разработку проблемы энергии большой вклад внесли работы А. А. Логунова, Л. И. Седова и Л. Д. Фаддеева.

Действительно, в последнее десятилетие бурно развиваются разделы теории гравитации, находящиеся на стыке с квантовой теорией: квантование гравитационного поля, квантование физических полей в заданном гравитационном поле, супергравитация, квантование модельных систем — квантовая космология, самосогласованный учет квантово-гравитационных эффектов (рождения частиц, поляризации вакуума, спонтанного нарушения симметрий в гравитационном поле и др.), частицеподобные решения для систем различных полей, а также объединение гравитации с другими физическими взаимодействиями.

Усилия исследователей направлены на решение таких актуальных физических проблем, как выяснение природы различных взаимодействий, объяснение наблюдаемой массы Вселенной, предотвращение начального сингулярного состояния в космологии и конечного при коллапсе, изотропизация расширения Вселенной, объяснение ее зарядовой асимметрии и т. п.

Не меньший интерес проявляется и к обобщениям ОТО, что вызвано рядом причин. Во-первых, в квантовом подходе получены результаты о неперенормируемости эйнштейновского гравитационного поля и материи. Это может означать, что надо либо модифицировать классическую теорию гравитации, либо изменить процедуру квантования, либо считать, что гравитационное поле остается классическим и его квантовать не надо. Во-вторых, и это свидетельствует в пользу первого соображения, имеются данные о медленных (на уровне 10^{-10} год $^{-1}$) вариациях гравитационной постоянной во времени. Этот результат был получен ван Фландерном в 1975 г. и подтвержден им в 1981 г. на основе сравнения данных по лунным покрытиям звезд в атомном и эфемерид-

ном времени за 20—25 лет, в течение которых существует служба атомного времени. Результат ван Фландерна стимулировал дальнейшую работу с гипотезами и теориями с вариациями фундаментальных констант. Помимо старых теорий Дирака (1938 г.), Гамова, Теллера, Бранса — Дикке, К. П. Станюковича, Хойла-Нарликара появились новые варианты теории Дирака — множественного и аддитивного рождения (1974 г.), космологическая теория Малина, масштабно-ковариантная теория Кануто, теория гравитационного вакуума, теория гравитации с конформно-инвариантным хиггсовским полем, теории с квадратичными лагранжианами и др.

Многие из перечисленных здесь направлений рассматривались в работах авторов и их коллег. Эти работы легли в основу данной книги.

В гл. 1 проанализировано современное состояние гипотез и теорий, связывающих основные константы микро- и макромира. Характерной их чертой является предсказание возможных вариаций во времени некоторых фундаментальных констант. Осуществлено сравнение выводов этих теорий с результатами экспериментов и наблюдений. Из анализа следует, что возможные вариации атомных констант исключаются современными астрономическими, астрофизическими и геофизическими данными, а вариации гравитационной постоянной (или масс всех частиц, или их произведения) не противоречат результатам современных экспериментов и наблюдений. Исследованы новые теории и гипотезы, допускающие такие вариации. В частности, изложена теория гравитации с фундаментальным хиггсовским полем, в которой гравитация появляется как следствие спонтанного нарушения конформной симметрии. Подчеркивается, что преимуществом такой теории является тот факт, что при согласованном учете спонтанного нарушения калибровочной симметрии в такой теории отсутствует сингулярное состояние Вселенной. Кроме того, в атомной системе единиц (c , $\hbar$, m — постоянные) теория допускает вариации эффективной гравитационной постоянной, согласующиеся с экспериментом, а в гравитационной системе единиц (c , $\hbar$, G — постоянные) — вариации масс всех частиц. Наконец, приведена несингулярная самосогласованная модель с учетом вариаций констант, объясняющая рождение всего наблюдаемого вещества Вселенной как результат рождения частиц в гравитационном поле (см. также гл. 6). В рамках этой модели удастся получить основные соотношения между константами микро- и макромира (в частности, для параметров некоторых элементарных частиц), предсказанные ранее на основе модели гравитационного вакуума.

В § 1.1 рассмотрены вопросы классификации фундаментальных физических констант, их число, а также эмпирические связи между константами микро- и макромира. В § 1.2 изложены основные гипотезы о возможных вариациях фундаментальных констант, начиная с гипотезы Дирака. В § 1.3 сопоставлены предсказания этих гипотез с космологическими, астрофизическими и геофизическими данными и результатами экспериментов. В § 1.4 изложены новые варианты гипотезы Дирака, теории, использующие идею о связи возможных вариаций констант со способом измерения и их тесты. В § 1.5 проанализирована масштабно-ковариантная теория Дирака, развитая Кануто с сотрудника-

ми, и даны основные астрофизические тесты. В § 1.6 рассмотрена теория гравитации с конформным хиггсовским полем, обсуждаются ее преимущества и возможность объяснения гипотезы Дирака о вариации G и локальных экспериментов в Солнечной системе. В § 1.7 дан вариант модели гравитационного вакуума с учетом возможных вариаций констант (см. также § 6.2).

Следующие четыре главы посвящены выяснению роли гравитации в явлениях микро- и макромира, квантовым аспектам теории гравитации. В них использован метод модельных систем различных физических полей, допускающих точные решения. Этот метод весьма эффективен, поскольку позволяет решить многие актуальные задачи гравитации, космологии и астрофизики.

Глава 2 посвящена исследованию точных решений систем скалярного, электромагнитного и гравитационного полей. Рассмотрение источников материи в уравнениях гравитации Эйнштейна (см. с. 28) в виде различных классических полей является важным и необходимым этапом при исследовании взаимосвязи гравитации с физикой микромира. Оно позволяет учесть более широкий класс уравнений состояния, чем те, которые используются в гидродинамическом подходе в ОТО, так как самосогласованные системы уравнений гравитационного и других полей содержат эффективные уравнения состояния. Кроме того, этот подход лучше приспособлен для анализа экстремальных процессов и состояний, таких, как коллапс массивных тел, ранние стадии эволюции Вселенной, влияние гравитации на малых расстояниях, в частности, на формирование частицеподобных решений.

Исследование самосогласованных модельных систем гравитационного и других полей было начато в 1967 г. на примере скалярного и гравитационного полей в связи с гипотезой о возможности существования сверхтяжелых фундаментальных частиц-планкеонов (максимонов) с параметрами порядка планковских масштабов массы (10^{-5} г) и длины (10^{-33} см). При этом впервые в самосогласованном подходе было использовано как классическое, так и квантованное конформно-ковариантное скалярное поле.

Другое приложение самосогласованные системы гравитационного и конформного скалярного поля нашли при описании свойств островных систем, а именно в проблеме коллапса. В § 2.1 даны точные решения для центрально-симметричной метрики, показано, что они распадаются на три класса.

Аналогичные решения для взаимодействия скалярного, электромагнитного и гравитационного полей в центрально-симметричной метрике приведены в § 2.2. В § 2.3 изложены точные *статические* решения самосогласованной системы конформного скалярного и гравитационного полей в виде замкнутых микровселенных Эйнштейна. Показано, что их размеры не могут быть меньше планковского ($\rho_0 = 1,35 \cdot 10^{-33}$ см), масса при этом $m(\rho_0) = 1,5 \cdot 10^{-5}$ г. Используются уравнения гравитации с λ -членом, который для $\rho = \rho_0$ равен $2/\rho_0^2$. Там же отмечено, что плотность энергии внутри планкеонов и плотность энергии вакуума, связанного с наличием λ -члена, одного порядка; это свидетельствует о наличии связи между планкеонами и гравитационным вакуумом. Ре-

шена также самосогласованная задача с учетом малых временных возмущений и показано, что они растут со временем. Это указывает на конечность времени жизни планкеев, если понимать их как ячейки гравитационного вакуума. Исследованы точные решения для системы N скалярных частиц в космологии в закрытой модели. Получена связь между массой адрона, наблюдаемым радиусом, числом частиц во Вселенной и λ -членом. Оказалось, что при задании любых двух из этих четырех параметров получаются наблюдаемые значения двух других параметров. Интересно, что в этой схеме найдено ограничение на максимально возможное в настоящее время число скалярных частиц во Вселенной: $N_{\text{макс}} \sim 10^{120}$, причем их масса имеет порядок массы гравитона (10^{-65} г). Эти частицы, вероятно, можно отождествить с хиггсовскими частицами, наличие которых предсказывается объединенными теориями слабых и электромагнитных взаимодействий.

В конце § 2.3 приведены *нестатические* решения взаимодействующих безмассового скалярного и гравитационного полей с λ -членом в метрике Фридмана. Показано, что среди них имеется несингулярное и устойчивое по Ляпунову, которое при больших временах стремится к решению в статической модели Эйнштейна. В этой задаче также найдено ограничение на максимально возможное число скалярных частиц: $N_{\text{макс}} \sim 10^{120}$ при $\lambda \sim 10^{-56} \text{ см}^{-2}$.

Точные статические решения для безмассового конформного скалярного поля в одном из вариантов скалярно-тензорной теории гравитации, аналогичные тем, которые изложены в предыдущем параграфе, исследованы в § 2.4. В результате анализа малых возмущений показано, что они также неустойчивы, но эта неустойчивость проявляется только в третьем порядке по теории возмущений.

Глава 3 посвящена исследованию роли гравитации в проблеме формирования точных частицеподобных решений для систем различных физических полей. В § 3.1 сформулированы сильный и слабый *критерии частицеподобных решений* с учетом гравитации как обобщение соответствующего критерия в плоском пространстве-времени.

В § 3.2 выписаны метрика, лагранжиан системы, основные уравнения, а также явно сформулированы требования, предъявляемые к частицеподобным решениям, — граничные условия на бесконечности, условия регулярности в центре, условия конечности полной энергии материальных полей, а также приведены формулы для вычисления гравитационной и инертной масс. Кроме того, даны формулы перехода от решений ОТО к решениям скалярно-тензорных теорий. Эти формулы, в частности, позволяют рассмотреть задачи с конформным скалярным полем в ОТО.

В § 3.3 с помощью критериев частицеподобности проанализированы решения самосогласованной системы уравнений линейного безмассового скалярного, линейного электромагнитного и гравитационного полей в статической, сферически-симметричной метрике. Показано, что во всех классах решений имеются сингулярности, поэтому они не удовлетворяют сильному критерию частицеподобности. Кроме того, во всех случаях, когда нет горизонтов, бесконечна полная энергия материальных полей, а поэтому не выполняется и слабый критерий частицеподоб-

ности. При наличии горизонта (решение типа Райснера — Нордстрема) полная энергия материальных полей в статической области конечна, и формально слабый критерий частицеподобности выполняется.

В § 3.4 описан один из способов получения несингулярных моделей частицы — протяженного источника полей в виде электрически и скалярно заряженной некогерентной материи. Получено, что сильный критерий частицеподобности в отсутствие внешнего скалярного поля удовлетворяется только при $Gm^2 = q^2$. Регулярные модели электронейтральных или слабо заряженных частиц возможны только с отталкивающим скалярным полем, сильно заряженные — с притягивающим. Приведен конкретный пример несингулярной заряженной частицы в ОТО. Показано также, что в рассматриваемом классе несингулярных моделей минимальный радиус источника не меньше классического радиуса частицы независимо от выбора имеющихся в решении произвольных функций. Указаны ограничения на возможные параметры несингулярных моделей в ОТО с конформным скалярным полем и в теории Бранса — Дикке. Кроме того, построена регулярная модель пары частица—античастица типа ручки Уилера в ОТО без скалярного поля.

В § 3.5 рассмотрена электродинамика в ОТО с нелинейностью, произвольно зависящей от инварианта электромагнитного поля. Доказано, что сильный критерий частицеподобности не выполняется ни для какой нелинейности. В общем случае получены условия, при которых справедлив слабый критерий частицеподобности. Его выполнение демонстрируется на примере электродинамики Борна — Инфельда с учетом гравитации.

В § 3.6 рассмотрены различные типы прямого взаимодействия безмассового нейтрального скалярного и электромагнитного полей в ОТО. Для лагранжиана взаимодействия вида $L_{\text{int}} = \sigma F^{\alpha\beta} A_{\alpha} \psi_{,\beta}$ решение сингулярно в центре, но удовлетворяет слабому критерию частицеподобности. Полная энергия системы при заряде, равном электронному, порядка планковской. Энергия материальных полей при переходе к плоской метрике расходится, т. е. гравитация играет регуляризующую роль. Показано, что в случае взаимодействия вида $L_{\text{int}} = [\exp(\sigma\psi) - 1] F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ решение также удовлетворяет слабому критерию частицеподобности, хотя метрика и скалярное поле сингулярны в центре. Полевая энергия конечна как при переходе к плоской метрике, так и при $\sigma \rightarrow 0$, причем при $\sigma = 0$ появляется горизонт событий (поле Райснера — Нордстрема), а полная энергия порядка планковской. При параметрах реальных частиц прямое взаимодействие преобладает, гравитационный вклад крайне мал. Наконец, при $L_{\text{int}} = \left(\frac{\sin^2 B\psi_0}{\sin^2 B(\psi - \psi_0)} - 1 \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ удастся построить полностью регулярную модель, удовлетворяющую сильному критерию частицеподобности. В этой модели плотности заряда и массы в центре равны нулю и максимальны при $r = r_{\text{кл}}/4$, что воспроизводит основные черты распределений заряда и массы протона, полученные экспериментально.

Глава 4 посвящена квантовой космологии, т. е. квантованию простейших гравитационных полей (космологических) и материи, причем в самосогласованной схеме. В § 4.1 изложены основные проблемы,

решаемые в рамках квантовой космологии. В § 4.2 сравниваются методы Дирака — де Витта и Арновитта, Дезера, Мизнера (АДМ) на примере квантования уравнений геометрической оптики, описывающих распространение лучей в неоднородной среде. Показано, что в этом случае результат квантования по методу АДМ является ВКБ-приближением квантования по методу Дирака — де Витта. В § 4.3 выведено соотношение неопределенностей для среднего значения оператора радиуса Вселенной и ее полной массы при квантовании закрытой фридмановской космологической модели. Получено, что среднее значение радиуса ограничено снизу. В § 4.4 рассмотрено квантование закрытой фридмановской модели Вселенной, заполненной конформным скалярным полем. Доказано, что вероятность сингулярного состояния равна нулю, причем этот результат имеет чисто квантовое происхождение. При переходе к классическому пределу получено известное сингулярное решение Фридмана. Показано также, что при малых временах скалярное конформное поле ведет себя как ультрарелятивистский газ, а при больших — как пыль. Аналогичное квантование проведено для скалярного поля с минимальной связью. Показана предпочтительность использования конформного скалярного поля.

В § 4.5 методом Дирака — де Витта осуществлено квантование частного решения Толмена, описывающего гравитационное поле, которое создается симметрично распределенным пылевидным веществом в ограниченной области пространства в сопутствующей системе отсчета. Вычислены среднее время замыкания по часам бесконечно удаленного наблюдателя и средняя яркость воспринимаемого светового излучения коллапсирующего материального шара. Показано, что вследствие квантовых флуктуаций эти величины конечны в отличие от соответствующих величин в классическом подходе.

Наконец, в § 4.6 рассмотрено квантование закрытой фридмановской космологической модели с пылевидным веществом при наличии космологической постоянной. Показано, что при $\lambda < 0$, как и при $\lambda = 0$, полная энергия материи обладает дискретным спектром, а также имеется максимальный радиус Вселенной, вне которого волновая функция экспоненциально мала. При $\lambda > 0$ получены квазистационарные уровни полной энергии материи и доказана возможность перехода от одного типа космологической модели к другому.

Глава 5 посвящена исследованию квантовых эффектов в теории гравитации в самосогласованной схеме. В § 5.1 рассмотрено обратное влияние эффекта спонтанного нарушения калибровочной симметрии конформного хиггсовского поля и получено, что для безмассового скалярного поля в открытой фридмановской модели существует несингулярное решение $a = (L^2 + t^2)^{1/2}$, где $L \sim 10^{-33}$ см при параметре самодействия, равном 1. Для массивного скалярного поля в открытой модели при малых временах также найдено несингулярное решение. Показано, что при больших временах симметрия восстанавливается и решение переходит во фридмановское. Доказано также, что результат об отсутствии сингулярности сохраняется, если в модели учитывается излучение и постоянный λ -член.

В § 5.2 рассмотрено спонтанное нарушение конформной симметрии хиггсовского безмассового поля. Показано, что эйнштейновская гравитационная постоянная выражается через вакуумное среднее от скалярного поля и в лагранжиане появляется аналог космологического члена. Отмечено, что наиболее важно появление в действии эйнштейновского члена $R/2$ и в результате спонтанного нарушения конформной симметрии. При этом гравитацию можно рассматривать как классическое проявление квантовых свойств вакуума. В § 5.3 проанализированы некоторые следствия спонтанного нарушения дискретных симметрий.

Построен ряд самосогласованных моделей с учетом рождения частиц. В § 5.4 методом квантования осциллятора с переменной частотой получены современные значения плотности газа нуклонов, а также оценка плотности гравитонов.

С использованием метода диагонализации гамильтониана в § 5.5 построены самосогласованные модели с некогерентным рождением пар фермионов. При современном значении параметра Хаббла получены, например, наблюдаемая плотность вещества во Вселенной и принятый сейчас ее возраст; выделена модель, в которой выполняется соотношение Маха.

Поскольку не существует единой теории всех типов физических взаимодействий, представляет интерес рассмотрение модельных схем, способных прояснить важные закономерности микро- и макромира. В гл. 6 рассмотрена одна из таких схем — эвристическая модель гравитационного вакуума как система излучающих планкеонов. В § 6.1 изложены основы модели. В § 6.2 обычными квантовыми методами рассмотрено рождение частиц планкеонами. При разумных предположениях получено число частиц с массой нуклона, близкое к наблюдаемому, $N \sim 10^{80}$. Получена формула для связи масс и характерных размеров нуклонов и Метагалактики. Как обобщение этой формулы сформулирован критерий гравитационной устойчивости частиц, который связывает их массы с некоторыми эффективными размерами. В § 6.3 рассмотрены приложения этого критерия к частицам. Массовая формула дает параметры нуклона, если эффективный размер частиц совпадает с ее комптоновской длиной волны, массу электрона, если его эффективный размер равен классическому радиусу, и массу покоя нейтрино, если его эффективный размер совпадает с радиусом слабых взаимодействий. В § 6.4 аналогичный гравитационный критерий сформулирован для возможности протекания высокоэнергетических процессов. Показано, что он выполняется в известных реакциях деления и синтеза. Его применение к оценке перспектив реализации управляемого термоядерного синтеза (§ 6.5) показало, что необходимо улучшить параметры современных установок на 1—2 порядка.

Глава 7 посвящена анализу движений в ОТО при условии, что материя описывается гидродинамическим тензором энергии-импульса. В § 7.1 выведены общие уравнения движения с учетом выделения и поглощения энергии. Как пример рассмотрен случай идеального газа. В § 7.2 эти уравнения исследованы при движениях среды, обладающих центральной симметрией, причем для трех различных систем

отсчета — центрально-симметричной, сопутствующей и синхронной. В § 7.3 на конкретном примере проанализированы переход от одной системы отсчета к другой, а также роль принципа соответствия при этом преобразовании. В § 7.4 даны общие преобразования для уравнений ОТО в центрально-симметричной системе отсчета, когда отсутствуют выделение и поглощение энергии. В § 7.5 исследованы автомоделные движения в ОТО, получены условия на уравнения состояния, при которых движения автомоделны. В § 7.5 построена механика сплошных сред при переменном числе частиц в искривленном пространстве, примененная в дальнейшем к космологии. Получены обобщенные уравнения гравитационного поля.

В гл. 8 проанализированы некоторые точные решения ОТО. В § 8.1 приведено решение Толмена в центрально-симметричной системе отсчета; в § 8.2 всесторонне исследовано это решение с учетом принципа соответствия. В § 8.3 критически проанализированы космологические решения в теории гравитации. В § 8.4 получены точные автомоделные решения в ОТО, в § 8.5 точные решения в центрально-симметричном гравитационном поле для ряда конкретных уравнений состояния, в § 8.6 исследованы стационарные центрально-симметричные движения среды во внешнем гравитационном поле. Наконец, в § 8.7 дано решение модели де Дондера.

Глава 9 посвящена обобщениям ОТО. В § 9.1 проанализированы однородные модели Вселенной на основе пятимерного формализма. В § 9.2 описана несингулярная закрытая космологическая модель, следующая из обобщенной теории гравитации и согласующаяся с гипотезой Дирака о вариации эффективной гравитационной постоянной. В § 9.3 выведены масштабно-инвариантные уравнения гравитационного поля и с их помощью исследованы различные космологические модели. Наконец, в § 9.4 вариационными методами получены уравнения для космологического и локального гравитационного полей.

Большинство рассмотренных в книге вопросов входило в спецкурсы, которые читали авторы на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова: «Механика сплошных сред и теория гравитации» (К. П. Станюкович, 1962 — 1972 гг.) и «Теория гравитации и фундаментальные физические константы» (В. Н. Мельников, 1973 — 1981 гг.). Главы 1—5 написаны В. Н. Мельниковым, гл. 7—9 — К. П. Станюковичем, гл. 6 — совместно.

Авторы благодарны своим коллегам Г. Н. Шикину, К. А. Бронникову, Ю. Н. Барабаненкову, В. М. Николаенко, Н. А. Зайцеву, А. Г. Радынову, Н. В. Павлову, В. Е. Якимову, В. В. Гоняеву, М. Ю. Иванову, Ю. М. Николаеву, Л. Б. Борисовой и А. А. Солодову за весьма полезные и плодотворные дискуссии и помощь в работе, что во многом способствовало написанию книги, а также М. Н. Бойцовой и Н. Н. Степановой за помощь в оформлении рукописи.

Авторы приносят извинения тем коллегам, весьма интересные работы которых по ряду причин не нашли отражения в книге или отражены недостаточно полно.

ПРОБЛЕМА ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАЦИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ «КОНСТАНТ» И СВЯЗЬ ФИЗИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Классификация констант. В любой физической теории обычно фигурируют константы, характерные для каких-либо объектов, процессов, классов процессов и т. п. Часть из них играет очень большую роль, и в силу этого их относят к разряду фундаментальных. Такое выделение фундаментальных констант (ФК) не является и не может быть абсолютным. В конечном итоге оно характеризует современный уровень развития физики, наши знания о тех или иных процессах, их связях. С развитием физики часть констант, которые некогда могли считаться фундаментальными, выпали из этого разряда.

В настоящее время к ФК физики наиболее часто относят следующие двенадцать величин [2,3]: c — скорость света; $\hbar$ — постоянную Планка; e — единицу электрического заряда, m_p — массу покоя протона (или m_e — массу электрона); G_F — постоянную слабых взаимодействий (постоянную Ферми); g_s — постоянную сильных взаимодействий; G — гравитационную постоянную; H — постоянную Хаббла; ρ — среднюю плотность вещества во Вселенной; Λ — космологическую постоянную (если она не равна нулю); k — постоянную Больцмана; $\mathcal{U}$ — механический эквивалент тепла.

Известно, что природа, важность и область применимости даже этих ФК весьма различны. Существуют различные классификации этих констант [3]. Наиболее простая классификация связана с их разбиением на константы микро- и макрофизики. Так, к «классическим» константам относятся k , $\mathcal{U}$, G , H , ρ , Λ , а к «атомным» — c , $\hbar$, e , m_p , G_F , g_s . Большинство констант относятся к конкретным физическим теориям: G — к теории Ньютона, e — к электродинамике Максвелла, $\hbar$ — к квантовой теории, k и $\mathcal{U}$ — к термодинамике и статистической физике, H , ρ , Λ — к космологии и т. п. Можно ввести и классификацию по типам взаимодействия: G — гравитационное, e — электромагнитное, G_F — слабое и g_s — сильное. Наконец, можно считать, что c и $\hbar$ носят более общий характер, поскольку они фигурируют и в различных физических теориях, и в различных типах взаимодействий. Более того, с помощью каждой из этих констант все физические процессы разбиваются на две группы: классические и квантовые, релятивистские и нерелятивистские.

Приведем один из способов классификации констант, а именно по степени общности: а) константы, характеризующие физические свойства отдельных объектов (массы элементарных частиц, их магнитные моменты и т. п.); б) константы, характеризующие целые классы физических явлений (в основном константы взаимодействия); в) универсальные константы типа c , $\hbar$. Следует подчеркнуть, что разбиение ФК на эти классы также не носит абсолютного характера. Исторически по мере расширения наших знаний некоторые ФК переходили из одного класса в другой (e из «а» в «б»; c из «а» в «б», а затем в «в») или, как отмечалось ранее, вовсе переставали быть фундаментальными (плотность, теплоемкость, магнитный момент и пр.), поскольку они стали вычисляться через другие константы.

Число фундаментальных констант. Мы видим, что число и конкретный набор ФК зависят от уровня развития наших знаний о природе физических явлений, поэтому может возникнуть вопрос о том, каково число «истинных» ФК. Например, сейчас в квантовой физике вновь становятся актуальными поиски объединенных теорий слабых, электромагнитных и сильных (а возможно, и гравитационных) взаимодействий. Весьма большие успехи уже имеются на пути объединения первых двух типов взаимодействий (теория Вайнберга — Салама), а также подключения к ним сильных. Интенсивно ведутся работы по объединению гравитационных взаимодействий с другими типами взаимодействий (например, различные варианты супергравитации). При удачном решении этих проблем константы различных типов взаимодействий либо будут связаны между собой (тогда некоторые из них перестанут быть фундаментальными), либо будут получаться из какого-то нового набора ФК.

Вообще говоря, вопрос о числе истинных ФК до сих пор не выяснен, и возможные ответы на него зависят от принятой общеприкладной концепции физического мира. Наиболее древняя точка зрения состоит в том, что совершенная теория мира вообще не должна содержать размерных постоянных — точнее говоря, их значения должны задаваться математическими формулами, содержащими безразмерные комбинации типа постоянной тонкой структуры. Легко видеть, что такая «метатеория», если бы она существовала, содержала бы в себе описание всех возможных физических явлений и миров. Более «скромный» подход предполагает, что наша Вселенная, помимо общих физических законов, описывается конечным числом характерных для нее и только для нее ФК. Тогда возможны две ситуации. Либо некоторые из этих истинных ФК еще не известны, и нам только предстоит их открыть, либо же, как интуитивно предполагает большинство ученых, все они уже содержатся в известных ФК, и тогда по мере прогресса наших знаний число независимых ФК должно уменьшиться, но не до нуля, а до, например, всего трех истинных ФК, связанных с единицами времени, длины и массы.

Эмпирические связи между константами микромира. Нам известны далеко не все связи даже между атомными константами. Ряд авторов указали на эмпирические соотношения между ними, которые не объясняются пока никакими существующими теориями.

Например, если мы составим из соображений размерности характерную длину l — радиус слабых взаимодействий, см:

$$l = \sqrt{G_F/\hbar c} \approx 6,71 \cdot 10^{-17},$$

то окажется, как впервые отметил Гамов, что выполняется соотношение

$$G_F = \hbar c l^2 = \alpha \mu_N^2,$$

где $\alpha \equiv e^2/\hbar c = 1/137$; $\mu_N = e\hbar/2 m_p c$ — ядерный магнетон. Эта формула, связывающая между собой константы слабого взаимодействия G_F , электромагнитного взаимодействия α и ядерный магнетон, до сих пор не имеет никакого теоретического обоснования.

Далее, Г. И. Ивантер (1959 г.) отметил следующую связь:

$$\frac{1}{G} \left(\frac{e}{m} \right)^2 = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2\alpha} \equiv \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\hbar c/2e^2}.$$

Это соотношение выполняется с погрешностью порядка 1%. Поскольку оно чрезвычайно чувствительно к значению α , можно предположить, что оно также не является случайным.

Существует много подходов, в которых из некоторых качественных соображений делаются попытки вычислить ФК [4]. Начало, возможно, было положено Эддингтоном [5], который, используя методы, основанные на введенном им понятии векторов полного импульса с девятью вещественными и шестью мнимыми компонентами, получил выражения для большинства ФК, включая число частиц во Вселенной. Аналитические связи между основными ФК из теоретико-групповых и топологических соображений в пространстве $(3+3)$ -измерений вывел ди Бартини (1966 г.), который также вычислил их значения, совпадающие с экспериментальными. Он же получил их возможные вариации в согласии с гипотезами К. П. Станюковича. Формулу для отношения массы протона к массе электрона указал Ленц (1951 г.)

$$m_p/m_e = 6\pi^5 = 1836,118, \quad (1.1)$$

что в пределах погрешности совпадает с экспериментальными данными. В рамках идей Эддингтона это же выражение было получено Гудом (1970 г.). Кроме того, он нашел новые формулы для разности масс нейтрона и протона и для гравитационной постоянной. Вайлер (1969 г.) из некоторых геометрических и групповых соображений получил

$$\alpha = 2^{-4} \cdot 3^2 \pi^{-11/4} (5!)^{-1/4} = 1/137,03608,$$

а также формулу (1.1). На основе «кристаллической теории эфира» Аспден (1969 г.) вычислил ряд ФК с погрешностью 0,1%. Позднее вместе с Иглзом (1972 г.) им были получены более точные выражения для α , для отношения (1.1), для гравитационной постоянной (1975 г.) и др. Используя в квантовой теории стохастический подход, в основе которого лежит взаимодействие с флуктуирующим полем нулевых колебаний, Сурдин (1971 г.) нашел приближенные выражения для α , а также связь между гравитационной постоянной и радиусом Вселенной. Приближенные значения α с использованием неортодоксального подхода

к теории элементарных частиц, основанного на распределении петель квантованного магнитного потока, приведены Йелем (1971 г.). С помощью развитой им модели мюона Росс (1972 г.) вычислил его массу. В рамках другой модели та же формула была получена (1974 г.) Теннаконе.

На основе классической модели частиц попытка вычисления ФК была предпринята И. Л. Герловиным (1974 г.). Формулу для постоянной тонкой структуры, выраженную через массы протона, нейтрона и электрона, вывел в теории протон-электрон-антинейтринного осциллятора Льюис (1973 г.). Полуклассическая модель элементарных частиц, в которой используется три кварка, движущихся вокруг общего центра по круговым орбитам, была развита Деланеем (1974 г.). На ее основе предложены два выражения для отношения масс протона и электрона, одно из которых совпадает с (1.1), а другое дано через α . Прадхан и Каре (1974 г.) предложили приближенное выражение для α как результат исследования одновременных коммутаторов в теории поля с фундаментальной длиной, а Лорд и др. (1974 г.) с помощью теории сильной гравитации вычислили отношение m_p/m_e . При исследовании процессов на ранних стадиях развития Вселенной Алексаняном (1975 г.) было получено соотношение между m_e , m_p , m_π и α . Основные результаты этих работ и их сравнение с экспериментальными данными представлены в табл. 1 [4].

Следует подчеркнуть, что все упомянутые выше теории и модели или основаны на большом числе весьма произвольных допущений, или частично противоречат современным хорошо установленным теориям, или эклектичны, или не имеют ясного физического смысла. Поэтому мы не останавливаемся на них подробно, но приводим их результаты как полезные закономерности, часть из которых может быть использована (или получена) в будущих объединенных теориях различных видов взаимодействия.

Эмпирические связи между константами микро- и макромира. До сих пор обсуждались проблемы, возникающие при попытках связать между собой или вычислить в основном атомные константы, т. е. константы микрофизики. При попытках получить теоретическую связь между ними и константами, относящимися к макромиру, — гравитационной постоянной G и так называемыми космологическими константами (H , ρ и, возможно, Λ) — возникают более серьезные проблемы. Дело в том, что каждая ФК, как указывалось ранее, связана обычно с какой-либо конкретной физической теорией. Ни СТО и ОТО, ни квантовая теория поля не дают связи между этими константами. Каждая теория существует независимо от другой и связать их (а следовательно, и установить какие-либо соотношения между ФК) строго пока не удастся. Одним из путей решения этой проблемы явилось бы создание квантовой теории гравитации, с помощью которой можно было бы связать «наиболее фундаментальные» физические величины G , $\hbar$, c , а возможно, и другие. В рамках какой-либо единой теории строгих соотношений между этими ФК получить пока не удастся, но можно попытаться установить их эмпирически, исходя из анализа размерности, числовых оценок этих констант и некоторых дополнительных гипотез или постула-

Таблица 1. Теоретические результаты для α^{-1} , m_p/m_e , m_μ/m_e и их сравнение с экспериментальными данными [4]

Константа	Формула	Числовое значение	Авторы, год
α^{-1}	$137 \beta^{1/24}$	137,042	Эддингтон, [5]
	$(24.5!/\pi^5)^{1/4} (8 \pi^4/9)$	137,036082	Вайлер, 1969
	$108 \pi (8/1843)^{1/6}$	137,035915	Аспден, Иглз, 1972
	—	137,0366	Герловин, 1973
	$(2 m_n - m_p) [18,5 m_e - 2 \times$ $\times (m_n - m_p)]^{-1}$	$137,019 \pm 0,003$	Льюис, 1973
	$4 \pi^5/9 + 37/36$	137,03653	Деланей, 1974
	$(137^2 + \pi^2)^{1/2}$	137,036016	Меллен, 1975
	—	137,03604(11)	Иглз*, [4]
m_p/m_e	$0,1 \beta^{-5/6} [68 + (68^2 -$ $- 10 \beta^{5/6})^{1/2}]^2$	1836,34	Эддингтон, [5]
	$6 \pi^5$	1836,118	Ленц, 1951; Гуд, 1970; Вайлер, 1971; Деланей, 1974
	—	1836,10	Герловин, 1973
	$(\alpha^{-1} - 37/36) (27/2)$	1836,11	Деланей, 1974
	$(3/4) 108^3 \pi^2 (1843)^{-4/3} \times$ $\times [(3/2)^{1/2} - 1]^{-1}$	1836,15232	Аспден, 1975; Аспден и Иглз, 1975
	—	1836,15152(70)	Иглз*, [4]
	—	—	—
m_μ/m_e	—	206,308	Герловин, 1973
	$1 + (3/2) \alpha^{-1}$	206,554	Росс, 1972; Теннаконе, 1974
	—	206,76847	Аспден, [4]
	—	206,76865(47)	Иглз*, [4]
G	$\beta^{1/6} (137 \pi/10) (136)^{1/2} \times$ $\times (3/10)^{1/2} \cdot 2^{-128} (e M_H)^2$	$6,6631 \times$ $\times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$	Эддингтон, [5]
	$(e/m_e)^2 \alpha^{-1} (3 \cdot 136 \cdot 2^{256} \cdot 6 \times$ $\times 32640 \cdot \pi^{68}/68!)^{-2} (1 + 0,1 \alpha)^{-2}$	$6,6731 \times$ $\times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$	Гуд, 1970
	$1,000888 (9/32 \pi^2) (\lambda_p R_\infty)^4 \times$ $\times (e/m_p)^2$	$6,6725 \times$ $\times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$	Герловин, 1973
	$(1 + \varepsilon)^2 [4\pi/(108\pi)^3 g^4]^2 (e/m_e)^2$ где $g = (9/4) [(3/2)^{1/2} \times$ $\times (m_p/m_e) + 1] + 1/2 =$ $= 5062,59; \varepsilon = (4 \pi/3) \times$ $\times 1843 (108 \pi)^{-3} = 1,98 \cdot 10^{-4}$	$6,6718 \times$ $\times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$	Аспден, 1975
	—	$6,6720(41) \times$ $\times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$	Иглз*, [4]
	—	—	—

* Экспериментальные значения.

тов. Работая в этом направлении, указанном еще Эддингтоном и Дираком, можно попытаться в какой-то степени установить связь между ФК. Существенно, однако, что этот путь приводит к зависимости некоторых «констант» от времени, а в противном случае связь между ними не устанавливается (см. § 1.2). Связи между указанными константами получаются также в модельных задачах, в которых проводится самосогласованное рассмотрение уравнений Эйнштейна и материи в виде физических полей — скалярного [6], спинорного и электромагнитного [7], а также в задачах квантовой космологии [8]. При этом обычно автоматически появляются три квантовогравитационных масштаба, так называемые планковские длина, см; масса, г; время, с:

$$L \equiv (\hbar G/c^3)^{1/2} \sim 10^{-33};$$

$$m_L \equiv (c\hbar/2G)^{1/2} \sim 10^{-5};$$

$$\tau_L \equiv L/c \equiv (G\hbar/c^5)^{1/2} \sim 10^{-43},$$

так как в теории гравитации фигурируют G и c , а в других теориях — $\hbar$ и c .

Преимуществом этих масштабов является то, что они выражаются только через ФК c , $\hbar$, G , и их можно было бы использовать для создания новой системы единиц. Но они характеризуют такие ситуации, которые являются экзотическими даже для микрофизики (L и τ_L на 20 порядков меньше, чем характерные длины и времена физики элементарных частиц; m_L на 20 порядков превышает массу нуклона). Однако существуют теории, в которых этим величинам придается фундаментальный смысл. Так, в работах Уилера [9], Д. И. Блохинцева [10] и др. L связывается с минимальными размерами, при которых еще имеет смысл сохранять обычные классические представления о пространстве-времени, так как при масштабах порядка 10^{-32} — 10^{-33} см флуктуирует метрика пространства. В работах К. П. Станюковича [11], М. А. Маркова [12], Сарфа (1975 г.) предполагается, что планковские масштабы характеризуют некую новую частицу, названную ими *планкеоном*, *максимоном* и *оном* соответственно.

Если эти теории получат в дальнейшем подтверждение, то планковским масштабам будет отведена фундаментальная роль в физике.

1.2. ГИПОТЕЗЫ О ВАРИАЦИЯХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ КОНСТАНТ [2, 3]

Итак, ФК микро- и макрофизики будем считать следующие двенадцать величин, значения которых взяты из [13]:

$$c = 2,997\,924\,590\,(8) \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$\hbar = 1,054\,588\,7\,(57) \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с};$$

$$e = 4,803\,242(14) \cdot 10^{-10} \text{ эрг}^{1/2} \cdot \text{см}^{1/2};$$

$$m_p = 1,672\,648\,5\,(86) \cdot 10^{-24} \text{ г};$$

$$G_F = 1,4 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3;$$

$$g_s \approx 13 \div 14;$$

$$G = 6,672\,0\,(41) \cdot 10^{-8} \text{ эрг} \cdot \text{см} \cdot \text{г}^{-2};$$

$$H = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1};$$

$$\rho = 4 \cdot 10^{-31} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3};$$

$$\Lambda < 10^{-56} \text{ см}^{-2};$$

$$k = 1,380662(44) \text{ эрг} \cdot \text{К}^{-1};$$

$$\mathcal{Y} = 4 \cdot 1868 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{кал}^{-1}.$$

Приведенные ФК известны с различной точностью. Как видно отсюда, наиболее точно измеряемой величиной является скорость света, хотя в связи с ведущимися сейчас работами по созданию единого эталона времени-длины она будет объявлена абсолютной постоянной, и ее конкретное значение потеряет смысл. Большинство атомных постоянных определено с погрешностью 10^{-6} , наименее точно — космологические постоянные (например, H — с погрешностью 10%, а возможно, и больше), а значение ρ может быть больше даже в 10^3 раз за счет различных форм невидимой или неучтенной материи (массивных нейтрино *, гравитонов, черных дыр и т. п.). В ОТО и космологии используется так называемая космологическая постоянная Λ , причем ее значение до настоящего времени неизвестно, если не считать оценки сверху. Прежде в различных теориях ее полагали равной нулю, однако согласно теории планкеонов [6] на ранних стадиях эволюции Вселенной она могла быть большой. В рамках объединенной теории слабых и электромагнитных взаимодействий также получен вывод о том, что хотя в современную эпоху она ничтожно мала (однако не равна нулю!), за время существования Вселенной значение ее уменьшилось в 10^{49} раз, так что на ранних стадиях развития Вселенной она могла играть существенную роль [14]. Теории со спонтанным нарушением симметрии также приводят к появлению космологической постоянной.

Из восьми приведенных выше ФК можно образовать пять безразмерных соотношений [2]:

$$\alpha = (e^2/\hbar c) = 7,3 \cdot 10^{-3}; \quad \beta = (G_F m^2 c/\hbar^3) = 9 \cdot 10^6;$$

$$\gamma = (G m^2/\hbar c) = 5 \cdot 10^{-39}; \quad \delta = (H \hbar/mc^2) = 10^{-42};$$

$$\epsilon = (G\rho/H^2) = 2 \cdot 10^{-3},$$

два из которых (γ и δ) приводят к очень малым значениям. Возраст же Вселенной $t = T/(e^2/mc^3) \sim 10^{39}$, выраженный в атомных единицах, — очень большое число (T — возраст, с).

Обычная точка зрения на эти соотношения следующая: «лабораторные константы» α , β , γ не меняются со временем, а «космологические константы» δ и ϵ согласно космологическим решениям уравнений гравитации зависят от времени, протекшего с момента образования нашей Вселенной, т. е. от космологической эпохи. Если Вселенная опи-

*Если данные о массе нейтрино подтвердятся, то Вселенная будет почти замкнута или совсем замкнута и ρ действительно будет на три порядка больше.

сывается моделями Фридмана, то мы имеем (г и п о т е з а А, обычная точка зрения):

$$\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \text{const}; \delta \sim t^{-1}; \varepsilon \rightarrow \text{const}.$$

Против гипотезы А существуют возражения, которые до работ ван Фландерна были основаны скорее на эстетических соображениях, чем на данных наблюдений.

Дирак [15] ввел *нумерологический принцип* [*гипотезу больших чисел* (ГБЧ)], утверждающий, что очень большие или очень маленькие числовые коэффициенты априори не должны встречаться в физических законах, а если появляются, то связаны с эпохой. Он заметил, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ могут быть приведены в согласие с нумерологическим принципом, если предположить (г и п о т е з а В, Дирак, 1938 г.):

$$\alpha, \beta, \varepsilon \rightarrow \text{const}; \gamma \sim t^{-1}; \delta \sim t^{-1}.$$

Эта гипотеза отражает глубокую связь между космологией и квантовой теорией. Из гипотезы В вытекают два следствия: уменьшение гравитационных сил со временем $\dot{G}/G$ примерно на 10^{-10} в год и принятие космологической модели с нулевой кривизной, т. е. ρ изменяется как t^{-1} , а не как t^{-2} . При этом $H \sim t^{-1}$, $\rho \sim t^{-1}$, $N \sim t^2$, т. е. расширение сопровождается рождением материи.

Первоначальная идея Дирака была использована Йорданом (1955 г.), который показал, что обобщение теории Эйнштейна на случай рождения вещества состоит во введении дополнительно к тензорному метрическому полю $g_{\mu\nu}$ скалярного поля ϕ .

Сиамма и Дикке проанализировали роль принципа Маха в физике и тоже пришли к необходимости введения скалярного поля.

Бранс и Дикке [16] разработали скалярно-тензорную теорию гравитации, основанную на принципе Маха. Они предположили, что $G \sim \phi^{-1}$, где ϕ — скалярное поле, меняющееся в пространстве и во времени. Теория содержит произвольный параметр $\omega \sim 10 \div 100$. Решение космологических уравнений в рамках этой теории приводит к предположению (г и п о т е з а С, Бранс — Дикке):

$$\gamma \sim t^{-r}; \delta \sim t^{-1}; \alpha, \beta, \varepsilon \rightarrow \text{const}.$$

Это означает, что

$$G \sim t^{-r}; H \sim t^{-1}, \rho \sim t^{r-2},$$

где $r = [2 + (3/2) \omega]^{-1}$.

Относительное изменение гравитационной постоянной равно $\dot{G}/G \sim \sim 10^{-11} \div 10^{-12} \text{ год}^{-1}$ в зависимости от типов космологических моделей в этой теории, т. е. более медленное, чем в гипотезе Дирака.

Учет влияния различных эффектов, связанных с давлением и кривизной, на временные изменения G в различных моделях скалярно-тензорных теорий можно найти в [17]. Там же отмечено, что влияние скалярного поля существенно в начальной стадии расширения Вселенной и при коллапсе массивных тел. Следует подчеркнуть, что в настоящее время существует множество вариантов скалярно-тензорных теорий, которые дают разные зависимости гравитационной постоянной от ска-

лярного поля, хотя зависимость от времени приблизительно соответствует теории Бранса — Дикке.

Гамов [18] предложил изменение $\alpha \sim t$, полагая, что естественной величиной является отношение между силой гравитационного притяжения и электростатического отталкивания двух протонов:

$$\gamma/\alpha = Gm^2/e^2 = 7 \cdot 10^{-37}.$$

Согласно нумерологическому принципу γ/α должно меняться как t^{-1} . Гамов предложил считать γ постоянной, а α меняющейся. Тогда имеем (г и п о т е з а D, Гамов):

$$\beta, \gamma, \varepsilon \rightarrow \text{const}; \alpha \sim t; \delta \sim t^{-1}.$$

При этом $H \sim t^{-1}; \rho \sim t^{-2}$.

Теллер [19], Л. Д. Ландау [20], де Витт [21], К. П. Станюкович [1,22], Салам и Стратди [23], Теразава (1977 г.) выдвинули множество аргументов в пользу следующего соотношения между гравитационной и электромагнитной константами:

$$\alpha^{-1} = \ln \gamma^{-1}$$

(Теллер — из чисто нумерологических соображений, чтобы объяснить, почему $\alpha \approx 0,02$, а не 1, остальные, кроме Теразава, — вводя идею о том, что фундаментальная планковская длина $L \equiv (G\hbar/c^3)^{1/2}$ дает естественное обрезание логарифмических расходимостей квантовой электродинамики). Теразава обобщил модель слабых, сильных и электромагнитных взаимодействий типа Намбу — Йона — Ласинио на случай учета гравитационных сил. Предполагается, что гравитон является коллективным возбужденным состоянием фермион-антифермионной пары. В качестве исходного выбирается нелинейный лагранжиан безмассового фермионного поля и вспомогательного тензорного поля, которое с помощью уравнений движения выражается через фермионное поле. Квадратично расходящиеся члены в петлевых диаграммах устранены процедурой обрезания по моменту. Получено выражение для гравитационной постоянной в нижнем порядке по константе связи. Из сопоставления с выражением для постоянной тонкой структуры найдено соотношение между гравитационной постоянной и постоянной тонкой структуры, аналогичное выражению Ландау.

Таким образом, если принять формулу $\alpha^{-1} = \ln \gamma^{-1}$ и нумерологический принцип Дирака, то получим (г и п о т е з а E, Теллер): $\beta, \varepsilon \rightarrow \text{const}; \alpha \sim (\ln t)^{-1}; \gamma \sim t^{-1}; \delta \sim t^{-1}$.

Скорость изменения α со временем дается величиной $R \equiv \dot{\alpha}/\alpha$. В гипотезах A, B, C $R = 0$. Гипотеза D дает: $R \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1}$, а гипотеза E: $R \approx -5 \cdot 10^{-13} \text{ год}^{-1}$.

В 1965 г. [1] была разработана теория гравитации с переменной гравитационной связью на основе групповых соображений и законов сохранения. Известно, что все уравнения теоретической физики для безмассовых частиц, кроме уравнений Эйнштейна, инвариантны относительно масштабных преобразований. Для получения масштабно-

инвариантных уравнений гравитационного поля варьировался лагранжиан $L = \tilde{\alpha} E_0 R^{3/2}$, где E_0 — наблюдаемая масса Метагалактики; R — скалярная кривизна; $\tilde{\alpha} = \text{const}$. В [22] на основе анализа космологических моделей (типа модели Фридмана) была установлена связь между «квантовыми» и космологическими константами (гипотеза F, Станюкович):

$$\gamma \sim t^{-1}; \alpha \sim (\ln t)^{-1}; \delta \sim t^{-1}; \varepsilon \sim t^{-2}; \beta = ?$$

При этом $G \sim t$; $e \sim t^{-1} (\ln t)^{-1/2}$; $\hbar \sim t^{-2}$; $m_p \sim t^{-2}$; $\dot{G}/G \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1}$; $\dot{\alpha}/\alpha \approx -5 \cdot 10^{-13} \text{ год}^{-1}$ или

$$\begin{aligned} \hbar &= \frac{M_0 c a}{T_m^3} = \frac{M_0 c \lambda^3 R}{12}; \quad G = \frac{c^2 a}{2M_0} = \frac{\sqrt{3} c^2}{M_0 \sqrt{R}}; \\ m_p &= \frac{\hbar}{c \lambda} = \frac{M_0 \lambda^2 R}{12}; \quad m_g = m_1 \frac{\lambda}{a} = \frac{\sqrt{3} M_0 \lambda^3 R^{3/2}}{72}; \\ m_L &= \frac{M_0 \lambda^{3/2} R^{3/4}}{6^{3/4}}; \quad L = \left(\frac{\lambda^3 \sqrt{R}}{2 \sqrt{3}} \right)^{1/2}; \quad \rho = \frac{\sqrt{3} M_0 R^{3/2}}{96\pi}. \end{aligned}$$

Здесь заданные и некоторые искомые фундаментальные величины выражены через массу Метагалактики $M_0 \sim 10^{56} \text{ г}$, $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$, комптоновскую длину волны протона $\lambda = 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ и переменную скалярную кривизну R . Лишь при $R = \text{const}$ эти величины постоянны.

В [22] сделан ряд фундаментальных выводов.

1. В римановом пространстве-времени переменной кривизны фундаментальные константы микро- и макромира могут быть выражены через три первичных фундаментальных параметра.

2. Только для уравнений гравитационного поля, удовлетворяющих масштабной группе, указанные три фундаментальные величины являются следствием закона сохранения: это полная энергия (масса) замкнутой Метагалактики, скорость света и комптоновская длина волны элементарной частицы.

3. При выполнении условий пп. 1 и 2 мир будет замкнутым.

4. Только при выполнении условий пп. 1—3 связь между энергией и числом частиц различных типов носит характер соотношений для флуктуаций, что позволяет говорить о термодинамическом обосновании иерархии типов частиц. В [24] прослежена связь между различными гипотезами, а также проанализированы основные соотношения между константами с использованием модифицированной теории гравитации и элементов квантовой теории. В этой работе выдвинута идея о связи вариаций различных физических констант с выбором системы единиц, в которой рассматриваются эти вариации. В качестве исходных соотношений использовались следующие:

$$2GM/c^2 a = 1; \quad \lambda_p^3 = L^2 a,$$

где M — полная масса Вселенной; $\lambda_p = \hbar/mc$; $a \sim 10^{28} \text{ см}$ — радиус кривизны Метагалактики. Эти соотношения известны как соотношения

Маха и Дирака. Подставляя известные значения $G, M, c, \hbar, \lambda, a$, не трудно убедиться, что данные соотношения выполняются в современную эпоху. В связи с тем, что число констант превышает число связей, некоторые из них можно считать постоянными, а остальные будут определяться с помощью приведенных выше соотношений [3]. В зависимости от этого выбора мы будем приходить к различным гипотезам. Так, при $G, c, \hbar \rightarrow \text{const}$ получим, что $\lambda \sim m \sim a^{1/3}, Gm \sim a^{1/3}$; при $c, \hbar, \lambda, m \rightarrow \text{const}$ (модель Дирака) $G \sim a^{-1}, M \sim a^2, Gm \sim a^{-1}$; при $c, \lambda, M \rightarrow \text{const}$ (модель [22]) $G \sim a, \hbar \sim m \sim a^{-2}, Gm \sim a^{-1}$. Возможны и другие выборы постоянных масштабов (см. гл. 5).

Заметим, что первая модель соответствует так называемой гравитационной системе единиц, когда единица времени выбирается в соответствии с теорией гравитации (например, на основе движения планет — эфемеридное время), а вторая — атомной системе единиц, когда измерения осуществляются с помощью устройств, действие которых основано на квантовых свойствах материи (при этом используются атомные стандарты частоты-времени).

Какая из этих моделей соответствует реальности? Ответ на этот вопрос может дать только сопоставление с данными наблюдений и экспериментов, которые должны помочь решить принципиальный вопрос о «переменности констант», выделить из них действительно постоянные. Не исключено, что все эти модели эквивалентны и отражают лишь произвол в способе измерений (выборе эталонов основных физических величин). Поэтому сопоставление с результатами наблюдений и экспериментов должно, во-первых, осуществляться с помощью безразмерных величин, а во-вторых, с обязательным учетом способа измерений.

Наконец, если объединить идею связи постоянных электромагнетизма и гравитации с гипотезой Дикке, то получаем (г и п о т е з а G [3]):

$$\beta, \varepsilon \rightarrow \text{const}; \alpha^{-1} \sim \ln t^r; \gamma \sim t^{-r}; \delta \sim t^{-1}.$$

Тогда

$$\dot{\alpha}/\alpha \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ год}^{-1}; \dot{G}/G \sim 10^{-11} \div 10^{-12} \text{ год}^{-1}.$$

Существуют возражения против нумерологического принципа. Дирак утверждал, что совпадение γ и δ не случайно. Следовательно, так как δ меняется как t^{-1} , и γ должно меняться как t^{-1} . Возражение Дикке: совпадение не случайно, но его можно объяснить, не прибегая к переменности γ , а просто на основании эффекта «селекции наблюдателей». Действительно, пусть время, необходимое на то, чтобы в природе успели появиться наблюдатели, равно t_D . Дикке утверждает, что t_D должно быть сравнимо с временем жизни звезды главной последовательности (ЗГП). Мы не знаем биологию настолько, чтобы вычислить t_D , но во всяком случае его нижний предел определяется минимальным временем жизни ЗГП $t_{\text{мин}}$. Порядок величины $t_{\text{мин}}$ определяется формулой $t_{\text{мин}} = \eta N m c^2 / L$, где $\eta = 0,008$; N — число протонов в звезде; L — светимость. Если определить N и L по Картеру, то можно получить оценку

$$t_{\text{мин}} \approx \gamma^{-1} \hbar / m c^2.$$

Таким образом, через время $t_{\text{мин}}$ после образования Вселенной соотношение $\delta \equiv H\hbar/mc^2$ будет приблизительно равно:

$$\delta_M \approx (\hbar/mc^2) t_{\text{мин}}^{-1} = \gamma.$$

Значит, в этом подходе наблюдаемое «совпадение» γ и δ объясняется тем, что требуется примерно время $t_{\text{мин}}$ для появления наблюдателей, чье существование сопряжено с существованием ЗГП, и принцип Дирака оказывается ненужным.

В настоящее время нет точного равенства между γ и δ : $\delta \approx 0,0002 \gamma$. Однако, если мы обусловим появление наблюдателей не просто существованием ЗГП, а существованием медленно вращающейся ЗГП G-типа, подобной Солнцу, то рассуждение Дикке объясняет не только неравенство γ и δ , но и порядок величины коэффициента в неравенстве.

Еще одно объяснение соотношения Дирака предложил Кавалло (1973 г.). Он предположил, что Вселенная обладает моментом импульса, пропорциональным моменту импульса электрона. В рамках расширяющейся ньютоновской космологической модели с вращением им были получены соотношения, аналогичные дираковским, а также предложена новая, «более фундаментальная» единица длины $e^4/\hbar mc^5 = 2,05 \cdot 10^{-15}$ см. Нарликар (1974 г.) дал объяснение соотношений Дирака с помощью гипотезы о рождении лептонов. Он считает, что сохранение заряда — статистический эффект, который допускает малые локальные флуктуации, связанные с рождением заряженных частиц.

Наконец Клаттон-Брок (1974 г.) сделал попытку получить соотношения Дирака в рамках гипотезы о том, что Вселенная стала однородной и изотропной, когда горизонт частиц был меньше комптоновской длины волны пиона. При этом вычислены флуктуации плотности число барионов в пределах горизонта частиц, которое зависит от времени согласно гипотезе В.

1.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО ВАРИАЦИЯМ КОНСТАНТ

Результаты, относящиеся к изменению α . Астрономические данные. Поскольку в нерелятивистском приближении все оптические длины волн, соответствующие переходам в атомах, в спектрах удаленных объектов одинаково зависят от α , из этих спектров мы никаких данных о вариациях α получить не можем. К счастью, в некоторых спектрах наблюдается релятивистская тонкая структура, характеризующаяся величиной α^4 , а не α^2 , как для энергии переходов. Бакколл и Шмидт [25] исследовали спектры испускания пяти радиогалактик с красными смещениями $z \approx 0,2$. Исследования велись по линиям дважды ионизованного кислорода, и в пределах погрешности в тонкой структуре не было обнаружено никаких отклонений от однородного красного смещения. Их вывод состоял в том, что $|R| \leq 2 \cdot 10^{-12}$ год $^{-1}$, что исключает гипотезу Гамова, но не может исключить гипотезу Теллера.

Исследовались также красные смещения галактик в оптическом и радиодиапазонах [26]. Длины волн в оптическом диапазоне зависят от

постоянной Ридберга R , а эмиссия в 21-сантиметровой водородной линии — от R и α . Поскольку в пределах погрешности красные смещения в обоих диапазонах оказались для одних и тех же объектов одинаковыми, получена оценка $(\Delta\alpha)/\alpha \leq (-1,0 \pm 1,5) \cdot 10^{-13} \text{ год}^{-1}$, что исключает гипотезы Гамова и Теллера. Из спектроскопических наблюдений внегалактических объектов эти же авторы дали более жесткую оценку: $|\dot{\alpha}/\alpha| < 10^{-14} \text{ год}^{-1}$. Новые измерения сверхтонкой структуры в линиях поглощения водорода в спектре весьма удаленного радиоисточника проделаны Вульфом и др.[27]. Полученные результаты позволяют утверждать, что значение $\alpha^2 (m_e/m_p) g_p$ менялось не более чем на $2 \cdot 10^{-14} \text{ год}^{-1}$ за период, составляющий не менее 35% возраста Вселенной. В предположении постоянства масс элементарных частиц эти данные исключают гипотезы Гамова и Теллера. Кроме того, наблюдения тонкой структуры в спектре магния от того же радиоисточника подтверждают принадлежащие Баколлу и Шмидту экспериментальные оценки, дающие предел изменения α не более $10^{-12} \text{ год}^{-1}$.

Итак, можно сделать вывод, что спектроскопические данные практически исключают имеющиеся гипотезы о вариациях постоянной тонкой структуры, а при постоянстве $\hbar$ и c — заряда электрона.

Геофизические данные [2]. Если мы рассматриваем долгоживущее радиоактивное ядро со скоростью распада λ , зависящей от α , то можно судить о характеристиках распада ядра по распространенности этих ядер в природе. Геофизические данные дают прямую информацию о величине $L \equiv \dot{\lambda}/\lambda$, связанной с α по закону $L = sR$, где $s \equiv (\alpha/\lambda) d\lambda/d\alpha$ — чувствительность ядра к изменению α . Уилкинсон, Голд, Пиблс и Дикке проанализировали соответственно α -распад, спонтанное деление и β -распад.

Рассмотрим α -распад. Если известны: 1) распространенность ^{238}U ; 2) распространенность ^{206}Pb , получающегося при распаде ^{238}U ; 3) независимые данные по определению возраста пород, то можно сказать, как изменялась скорость распада урана в прошлом. Геофизические данные дают оценку: $|L| \leq 10^{-10} \text{ год}^{-1}$, т. е. $R \leq 2 \cdot 10^{-13} \text{ год}^{-1}$ [2]. Однако гипотезу Теллера нельзя исключить на основе этих данных с полной определенностью, поскольку множество неопределенностей содержится в оценках по пп. 1—3.

Данные по спонтанному делению ^{238}U [2] приводят к несколько менее точным оценкам: $|R| \leq 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ год}^{-1}$.

Рассматривая β -распад, Пиблс и Дикке подчеркнули, что наиболее удобным для анализа является ядро ^{187}Re , так как: 1) это распространенный изотоп рения (63% природного рения); 2) продукт его распада ^{187}Os не летуч; 3) распространенность осмия не столь велика, чтобы подавить продукт распада ^{187}Os ; 4) рений встречается преимущественно в железных метеоритах, которые, вообще говоря, превосходят каменные как по возрасту, так и по химической и физической целостности.

Три основных источника данных по распаду ^{187}Re : а) изотопный анализ молибденитовых руд; б) изотопный анализ железных метеоритов; в) лабораторные измерения скорости распада. Из всех этих дан-

ных следует, что $|L| \leq 10^{-16}$ год⁻¹ или (окончательно) верхний предел изменения $|R| \leq 5 \cdot 10^{-15}$ год⁻¹ [2], что является наиболее точным полученным из геофизических данных соотношением, относящимся к изменению ФК. В частности, это значение $|R|$ опровергает как гипотезу Гамова, так и гипотезу Теллера.

Лабораторные тесты. Следует отметить, что приведенные ранее результаты получались на основе астрономических и геофизических данных, сильно зависящих от принятых моделей исследуемых образцов. Поэтому желательно иметь данные соответствующих лабораторных тестов. Н. Г. Басов с сотрудниками (1965 г.) предложил для проверки гипотезы о вариациях $\dot{\alpha}/\alpha$ сравнивать частоты двух высокостабильных квантовых генераторов, работающих на квантовых переходах различной природы, т. е. по-разному зависящих от ФК. Например, отношение частот водородного мазера и квантового генератора, стабилизированного по узкому резонансу на переходе между уровнями вращательной структуры, пропорционально α^2 . Впервые такого рода сравнение было осуществлено Н. И. Колосницким с сотрудниками в 1975 г. [28] на основе сличения в 1964—1969 гг. показаний цезиевого эталона времени-частоты и молекулярного генератора, работающего на пучке молекул аммиака. Они получили, что $R \leq 10^{-11}$ год⁻¹. В дальнейшем Турнер и Стейн (1976 г.) провели аналогичное сличение показаний цезиевых стандартов частоты и ансамбля высокостабильных генераторов со сверхпроводящим резонатором. Их результат: $R \leq 4,1 \cdot 10^{-12}$ год⁻¹. Таким образом, наиболее надежные лабораторные данные исключают гипотезу Гамова, но не исключают гипотезу Теллера. Возможен дальнейший прогресс в получении оценок вариаций α по мере совершенствования эталонов времени-частоты, в частности, за счет создания преобразовательных мостов между оптическим и радиодиапазонами. Первые результаты уже получены [29].

Данные, относящиеся к изменению постоянной слабых взаимодействий β . При анализе данных по распаду ^{187}Re предполагалось, что безразмерная постоянная слабых взаимодействий β не меняется со временем. Все β -распады пропорциональны β^2 , и поэтому постоянство скорости распада рения согласуется с изменением α и β , если они меняются так, что $\beta^2 \alpha^s = \text{const}$, где $s = -18\,000$. Сравнивая скорости распада двух ядер с сильно различающимися значениями, можно разделить эффекты изменения α и β . Например, данные о постоянстве скорости распада ^{40}K примерно так же точны, как и для ^{187}Re . Таким образом, отношение скоростей распада ^{40}K и ^{187}Re : а) независимо от β ; б) столь же чувствительно к изменению α , как и сама по себе скорость распада ^{187}Re ; в) известно с погрешностью менее 10^{-9} год⁻¹. Из постоянства этого отношения следует, что $|R| \leq 2 \cdot 10^{-14}$ год⁻¹ независимо от предположения о постоянстве β . Из постоянства скорости распада ^{40}K следует тогда, что $|\dot{\beta}/\beta| \leq 10^{-10}$ год⁻¹ [2]. Существуют несколько менее точные (но более прямые) оценки Уилкинсона с использованием данных исследований плеохроичных ореолов — сфер, образованных треками α -частиц вокруг вкраплений урансодержащих минералов в слюде.

Некоторые авторы предполагают, что нумерологический принцип Дирака можно приложить и к постоянной слабых взаимодействий β . Тогда гипотеза Дирака модифицируется предположением $\beta \sim t^{-f} \sim \sim \gamma^f$, где f — небольшая величина (например, $1/4$ или $1/8$). Это не противоречит приведенной выше оценке и не исключается имеющимися данными. Единственное возражение — то, что в данном случае согласно модели «большого взрыва» на самых ранних стадиях образовалось бы слишком мало гелия. Это, однако, убедительный, но не решающий аргумент. Существуют также результаты (Адамс, Кануто, 1976 г.), относящиеся к определению момента начала галактического нуклеосинтеза и возраста Вселенной в стандартной модели в рамках нумерологического принципа Дирака, которые свидетельствуют в пользу возможных вариаций постоянной слабых взаимодействий (табл. 2). Как видно из таблицы, время, прошедшее от момента начала нуклеосинтеза, определенное по распаду $^{187}\text{Re} \rightarrow ^{187}\text{Os}$, в стандартной модели превышает возраст, определяемый независимо, а при вариациях G_F согласуется с ним, что указывает на предпочтительность модели с вариациями постоянной слабых взаимодействий.

А. И. Шляхтер [30] предложил новые оценки пределов возможного изменения со временем постоянных сильного, электромагнитного и слабого взаимодействий. В этих оценках используется тот факт, что резонансные свойства системы тяжелое ядро — медленный нейтрон делают ее весьма чувствительной к возможным изменениям постоянной сильной связи со временем, поскольку такое изменение привело бы к сдвигу резонансного уровня. Из эксперимента известно, что для подавляющего числа резонансов такой сдвиг не превосходит 10^{-3} эВ. Далее, рассматривая природный ядерный «котел», обнаруженный недавно в Окло (Габон), возраст которого составляет около $2 \cdot 10^9$ лет, можно оценить сечение захвата нейтронов в эпоху, отделенную от нас почти «космологическим» промежутком времени. Комбинируя эти данные, а также используя известные соотношения между порядками величин постоянных сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий, А. И. Шляхтер получил следующие оценки пределов возможного изменения за год (в первой колонке — значения по [1, 31], во второй — по [30]):

$\dot{G}_S/G_S$	$< 2 \cdot 10^{-12}$	$< 5 \cdot 10^{-19}$
$\dot{\alpha}/\alpha$	$< 2 \cdot 10^{-14}$	$< 10^{-17}$
$\dot{G}_F/G_F$	$< 10^{-10}$	$< 2 \cdot 10^{-12}$

Эти данные исключают все имеющиеся гипотезы о возможных вариациях постоянных тонкой структуры, сильных и слабых взаимодействий. Однако эти сильные ограничения в решающей степени зависят от того факта, что до сих пор неизвестен ни один резонанс, сдвиг для которого превосходил бы приведенные выше оценки.

Данные по вариациям $\hbar$ и c . Для оценки возможных вариаций $\hbar$ со временем Нордлингер (1973 г.) сравнивал различные части кривой реликтового фонового излучения: Рэлея — Джинса (зависимость от

Т а б л и ц а 2. Определение возраста Вселенной

Модель	Время от момента начала нуклеосинтеза, млрд. лет		Возраст Вселенной, определенный независимо по динамике скоплений, млрд. лет
	по $^{187}\text{Re} \rightarrow ^{187}\text{Os}$	по урановой цепочке	
Стандартная Дирака	18 13,5	13 13	16 17,8

kT) и коротковолнового (зависимость от kT и $\hbar$). Его результат: $\hbar$ не изменилось с погрешностью 10% за эпоху, прошедшую с $z = 1000$. Баум и Флорентин-Нильсен [26] определяли возможные вариации $\hbar c$ прямыми методами с помощью сравнения энергий старых фотонов (от далеких галактик) с заданной длиной волны и молодых фотонов (от близлежащих галактик) той же самой длины волны. Их результат:

$$\Delta(E\lambda)/E\lambda = \Delta(\hbar c)/\hbar c \leq (-3,2 \pm 2,7) \cdot 10^{-12} \text{ год}^{-1}.$$

При сравнении фотографий, сделанных в разные дни года, они получили, что отсутствуют относительные смещения между удаленными галактиками и близлежащими звездами. Из этого факта сделан вывод о постоянстве аберрации для молодых и старых фотонов, а следовательно, и о постоянстве скорости света: $\Delta c/c < 10^{-12} \text{ год}^{-1}$. Из двух последних оценок следует, что и $\Delta\hbar/\hbar < 10^{-12} \text{ год}^{-1}$. Те же авторы на основе анализа сдвигов линий поглощения кислорода в спектрах ядер нормальных галактик с $z = 0,03$ получили, что $\Delta(\hbar c)/\hbar c < 5 \cdot 10^{-13} \text{ год}^{-1}$, а из аналогичных данных по спектрам квазаров: $(\hbar c)/\hbar c < 2 \cdot 10^{-14} \text{ год}^{-1}$. Подобную работу, но с помощью другого метода по определению $E\lambda = \hbar c$ для излучения от квазаров с $z \leq 1,6$ проделали Солхейм и др. (1976 г.). Их результат: $\hbar/\hbar \leq (3 \pm 4) \cdot 10^{-13} \text{ год}^{-1}$ ($c = \text{const}$; $\Lambda = 0$; $q = 0,03$; $H = 50 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$). Следует отметить, что результаты по квазарам сильно зависят от принятой космологической модели, поэтому более надежными следует считать результаты [26].

Экспериментальные данные по вариациям G . Здесь ситуация гораздо менее ясна (к тому же G является одной из наименее точно определенных среди всех ФК). Получены первые результаты эксперимента по проверке вариаций G , основанного на наблюдении покрытий, или затмений, звезд Луной [32]. Анализ данных этих наблюдений с помощью существующей с 1955 г. службы времени-частоты (атомных часов, не зависящих от движения небесных тел) показал, что период обращения Луны вокруг Земли увеличивается. Если вычесть увеличение периода, обусловленное приливными силами, то остающаяся необъясненной часть может быть истолкована как результат уменьшения G (или масс всех частиц, или Gm). В простейшем предположении, что меняется только гравитационная постоянная, скорость ее уменьшения оценена как $(-7,5 \pm 2,7) \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1}$ *. Аналогичные оценки для из-

*Последние данные ван Фландерна (1981 г.) для теории Кануто (см. § 1.5) таковы: $\dot{G}/G = (-6 \pm 2) \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1}$ [66].

менения G были получены в экспериментах по лазерной локации Луны Вильямсом [33]. Однако в [34] подчеркивается, что погрешность, приводимая в [32], значительно недооценена и что отрицательное значение для $\dot{G}/G$ на самом деле не отличается существенно от нуля. По утверждению авторов, сейчас можно лишь считать, что $|\dot{G}/G| < 10^{-10}$ год $^{-1}$. Помимо результата ван Фландерна и более осторожной оценки Шапиро, имеются оценки Мэнсфилда из анализа замедления пульсара *JR* 1953: $|\dot{G}/G| \leq (5,8 \pm 1,0) \cdot 10^{-11}$ год $^{-1}$ [35] и Блейка [36] на основе палеонтологических данных (кораллы и пр.) о вариациях солнечного дня и синодического месяца: $|\dot{G}/G| = (-0,5 \pm 2,0) \cdot 10^{-11}$ год $^{-1}$. Как показали Макелхинни и др. [37], которые исследовали данные по палеорадиусу Земли, Луны, Марса и Меркурия, наиболее точные данные по Меркурию (при использовании некоторых весьма разумных допущений о его внутреннем строении) указывают на то, что в космологических моделях с постоянной полной массой $|\dot{G}/G| < 8 \cdot 10^{-12}$ год $^{-1}$, а в моделях с рождением вещества $|\dot{G}/G| < 2,5 \cdot 10^{-11}$ год $^{-1}$. Имеются также многочисленные астрофизические тесты теорий и гипотез, предсказывающих вариации гравитационной постоянной и масс тел.

Из всей этой совокупности данных можно сделать вывод, что гипотезы с вариациями атомных констант практически исключаются и на сегодняшний день наиболее жизненными оказываются теории, в которых предсказываются вариации гравитационной постоянной на уровне $10^{-10} - 10^{-11}$ год $^{-1}$ (или массы всех тел при $G = \text{const}$, или произведения Gm) [38].

1.4. ТЕОРИИ, ОСНОВАННЫЕ НА СВЯЗИ МЕЖДУ ВАРИАЦИЯМИ КОНСТАНТ И ВЫБОРОМ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Гипотеза Дирака 1938 г. противоречит решениям Фридмана, следующим из уравнений Эйнштейна. Поэтому возникает альтернатива: либо отказаться от уравнений Эйнштейна, либо незначительно их модифицировать, чтобы допускалось медленное изменение G со временем. Учитывая, что современные экспериментальные данные в рамках погрешности 1—0,5% согласуются с теорией Эйнштейна, Дирак [39] пошел по второму пути. Он проанализировал космологические модели, согласующиеся с его гипотезой $G \sim t^{-1}$, $N \sim t^2$, и пришел к выводу, что при этом могут реализовываться две космологические модели. Первая — ГМРД — гипотеза мультипликативного рождения — приводит к непрерывному рождению вещества в областях, уже занятых веществом, и является замкнутой цилиндрической моделью Эйнштейна. Согласно концепциям [22] и Иордана эта идея может быть связана с гипотезой Амбарцумяна о взрывах звезд и выделении «дозвездного вещества». Вторая — ГАРД — гипотеза аддитивного рождения — соответствует непрерывному рождению вещества во всем пространстве и приводит приблизительно к плоскому пространству Минковского с началом в точке «большого взрыва». При этом анализе Дирак использовал метрики двух типов: ds_E , фигурирующую в полевых уравнениях Эйнштейна, и ds_A , определяемую с помощью ла-

бораторных приборов, в которых используются свойства атомов (спектральные линии, кристаллические решетки и т. п.). Эта идея близка к изложенной в [3, 24], поскольку две метрики как раз соответствуют выбору двух различных систем единиц. Дирак предположил, что в эйнштейновских единицах G_E массы планет M_E , их скорости v_E и радиусы их орбит r_E постоянны. Тогда из анализа закона движения планет $GM = v^2 r$ следует, что в атомных единицах соответствующие величины $v_A = v_E = \text{const}$, $G_A \sim t^{-1}$, а остальные в зависимости от типа модели меняются следующим образом:

$$M_A \sim t^2; \quad r_A \sim \lambda_A \sim t; \quad ds_A \sim t \, ds_E; \quad \Lambda \sim t^2 \text{ или } \Lambda = 0$$

(ГМРД, Земля при этом постепенно удаляется от Солнца, так же как и Луна от Земли);

$$M_A \approx \text{const}; \quad r_A \sim t^{-1}; \quad ds_A = t^{-1} \, ds_E; \quad \Lambda = 0$$

(ГАРД, Земля при этом приближается к Солнцу). Этот вариант соответствует [32].

В ГМРД в эйнштейновских единицах $m \sim t^{-2}$; $e \sim t^{-3/2}$; $\hbar \sim t^{-3}$, в ГАРД $m = \text{const}$.

Другое обобщение теории Эйнштейна, мотивированное тем, что в современных теориях слабых и электромагнитных взаимодействий со спонтанным нарушением симметрии масса частиц может меняться со временем, предложено Малином в 1975 г. Исследованы космологические следствия предположения, что уравнения Эйнштейна (точнее Гильберта — Эйнштейна, поскольку первым их получил Гильберт) могут быть заменены уравнениями $R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$. В рамках данного подхода энергия и масса покоя частицы являются несохраняющимися величинами в космологической шкале времени. При использовании уравнения состояния пылевидного вещества получены однородные и изотропные решения уравнений гравитации для трех типов пространственной кривизны. Эти решения существенно отличаются от решений Фридмана. Найдено, что космологическая модель соответствует расширяющейся Вселенной с уменьшающейся скоростью расширения, увеличению гравитационной постоянной со временем и неизменным постоянным электромагнитных, сильных и слабых взаимодействий. Показано, что масса покоя частиц изменяется с мировым временем как $\dot{m}/m = -3H$, где H — постоянная Хаббла, т. е. $\dot{m}/m \sim 10^{-10} \text{ год}^{-1}$.

Теория гравитации, в которой массы покоя всех частиц могут изменяться в пространстве-времени (ТПМ), рассмотрена в [40]. Из анализа результатов экспериментов по проверке принципа эквивалентности и анизотропии массы сделан вывод о том, что если массы всех тел меняются, то одинаковым образом. Высказано предположение, что их возможное изменение относительно планковской массы (при использовании гравитационной системы единиц) может быть описано универсальным безразмерным скалярным полем:

$$m_a/m_L = \chi, \quad L_a/L = \chi^{-1}, \quad \text{где } m_a, L_a; m_L, L —$$

единицы массы и длины в атомной и планковской (гравитационной) системах соответственно. Динамика этого поля строится

при весьма общих допущениях, а именно: 1) выполнены условия общей ковариантности; 2) уравнения поля не должны быть более высокого порядка, чем второй; 3) уравнения поля не должны содержать постоянного масштаба длины. Предполагается так же, как и в работах Дирака [39], что в планковских единицах справедливы уравнения Эйнштейна. Линейные элементы в планковских и атомных единицах связаны между собой конформными преобразованиями. Получено, что универсальное скалярное поле в общем случае является некоторой степенью $r = \text{const}$ скалярного поля, подчиняющегося обычному безмассовому скалярному уравнению (связь со скалярной кривизной $q = \text{const}$). Ограничения на постоянные параметры r и q определены из сопоставления теории, переформулированной в терминах постоянных масс и переменной гравитационной постоянной в скалярно-тензорную, с результатами экспериментов в Солнечной системе по проверке ОТО. Сделан вывод о том, что при $r \leq 0$, $q > 0$, при $q < 0$, $0 \leq r \leq 1$, а также при $q = 0$ и любом r изменение массы допускается и необходимо привлекать космологические тесты. Показано, что теорию с универсальным скалярным полем можно проквантовать и интерпретировать в терминах безмассовых квантов скалярного поля, слабо взаимодействующих с веществом. Этим фактом и объясняется их отсутствие в экспериментах при высоких энергиях.

Относительно космологических тестов этой теории показано, что если асимптотическое значение $f = 8 \pi G_0 c^{-4} \psi$ (ψ — скалярное поле) на бесконечности составит $f_\infty \approx r(r-1)^{-1}q^{-1}$, то при указанных r и q значения постньютоновских параметров теории будут близки к значениям, даваемым ОТО, а поэтому теории с переменными массами будут удовлетворять экспериментальным данным. Интегрирование скалярного уравнения на фоне космологической модели Фридмана приводит к тому, что $f \rightarrow f_\infty$ при расширении Вселенной, если $r < 0$, $q > 0$, и не стремится к этому значению, если $0 < r < 1$, $q < 0$. Вследствие этого вторая область значений параметров исключается. Для первого случая проанализированы эффекты сильного поля и сделан вывод о том, что предсказания ТПМ о процессах с нейтронными звездами и черными дырами практически не отличаются от предсказаний ОТО. Единственная область, где они различаются, это космология, поскольку в ТПМ имеются несингулярные решения, а потому скорости расширения на начальных этапах эволюции будут различны, и это должно сказаться на синтезе ^4He и D . На основе общей схемы получено ограничение на вариации гравитационной постоянной с помощью постньютоновых параметров $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$:

$$\dot{G}/G = -A(4\bar{\beta} - \bar{\gamma} - 3)\dot{f}/f, \quad A = A(f) \approx 1.$$

Поскольку из данных о лазерной локации Луны следует, что $|4\bar{\beta} - \bar{\gamma} - 3| < 0,03$, а в ТПМ $|4\bar{\beta} - \bar{\gamma} - 3| > 0$, делается вывод о том, что вариации $\dot{G}/G$ на два порядка меньше, чем постоянная Хаббла H_0 . Знак же вариации совпадает с результатами ван Фландерна [32] и Мюллера [41]. Проанализирована возможность использования изменения периода пульсаров для определения возможных вариаций гра-

витационной постоянной. Отмечено, что увеличение периода за счёт изменения G ($\dot{P}/P \sim 10^{-10} \div 10^{-12} \text{ год}^{-1}$) будет маскироваться более сильным его увеличением за счёт излучения пульсаров (обычно $\dot{P}/P \sim 10^{-7} \div 10^{-8} \text{ год}^{-1}$). Поэтому для реализации этого теста необходим поиск пульсаров с характерным временным масштабом, превышающим 10^{12} лет.

Дирак [42] предложил обновленный вариант своей гипотезы 1938 г. Вместо предположения о непрерывном рождении вещества, объясняющего закон $N \sim t^2$, он ввел модель с замедлением расширения, так чтобы в пределах горизонта появлялось все больше и больше галактик со скоростью удаления меньшей, чем $c/2$. Причиной его отхода от идеи рождения вещества является попытка согласовать ГБЧ с данными по реликтовому излучению. Схема рассуждений Дирака такова. Пусть $R = ct$ — радиус наблюдаемой Вселенной. Тогда средняя плотность в атомных единицах $N/R^3 = t^2/(ct)^3 \sim t^{-1}$. Чтобы плотность изменялась таким образом, расстояние до галактик в отсутствие рождения должно меняться как $D \sim t^{1/3}$, а скорость удаления — как $v \sim t^{-2/3}$. В этой схеме фоновое излучение с температурой 3К ведет себя в соответствии с ГБЧ. Действительно, с одной стороны, $\lambda \sim D \sim t^{1/3}$, $T \sim v \sim \lambda^{-1} \sim t^{-1/3}$. С другой, для реликтового излучения сейчас $kT/m_p c^2 = 2.5 \times 10^{-13}$, поэтому согласно ГБЧ $kT/m_p c^2 \sim t^{-1/3} \sim 10^{-13}$. В то же время в стандартной теории $T \sim v \sim \lambda^{-1} \sim t^{-1}$, что противоречит ГБЧ.

Правда, возраст в этой модели получается меньше, чем принято, так как вместо $H \sim t^{-1}$ в стандартной модели с линейным расширением мы имеем $H = 1/3 t$. Это при одном и том же H ведет к возрасту, втрое меньшему: $t \sim 6 \cdot 10^9$ лет. Хотя Дирак и считал, что это значение не исключено, но оно явно противоречит независимым оценкам, например, по возрасту шаровых скоплений. В рамках этой гипотезы с $M = \text{const}$, $G_A \sim t^{-1}$ проанализировано в атомной системе движение планет. Показано, что при этом $v^2 r_A \sim t^{-1}$. Дальнейший анализ зависит от связи атомной t и эфемеридной τ шкал времени. Если $\tau = \ln t$, как это предположил Милн, то $r_A \sim t^{2/3}$ (зависимости от времени радиусов орбит и скоростей планет на орбитах такие же, как у галактик). Планеты при этом удаляются от центрального тела. В ГБЧ из $G_A \sim t^{-1}$, $G_E = \text{const}$, $m_A = m_E = \text{const}$ следует, что $ds_E = t ds_A$, $d\tau = t dt$, $\tau = t^2/2$. Тогда $r_A \sim t^{-1}$, и планеты приближаются к центру. В этом варианте Дирак проанализировал космологические модели различных типов. Так как в закрытой модели полная масса — большое число и константа, не зависящая от возраста, эта модель противоречит ГБЧ. Противоречит ГБЧ и гиперболическая модель, поскольку радиус кривизны меняется так же, как и расстояние до галактик, а потому полная масса внутри сферы с этим радиусом (большое число) постоянна. Дирак сделал вывод, что ГБЧ выделяет лишь квазиевклидову модель. В связи с этим в эйнштейновских единицах проанализирована модель с плоским 3-пространством, в которой радиус зависит только от τ : $ds_E = d\tau^2 - R_E^2 dx^2$.

В предположении, что давление равно нулю, из уравнений Эйнштейна Дирак нашел, что $R_E \sim \tau^{2/3}$, $\rho_E = (4/3) \tau^{-2} = (16/3) t^{-4}$;

при этом $\rho_A \approx (16/3) t^{-1}$. Таким образом, Дирак пришел к модели Эйнштейна — де Ситтера. Получено обобщение метрики Шварцшильда с $m \sim \tau^{-2/3}$, которое переходит в метрику Эйнштейна — де Ситтера при больших r . Этой метрике соответствуют отрицательное космологическое давление $p_E = (4/3) \tau^{-2} (1 - n^{-1})$ и плотность энергии $\rho_E = (4/3) \tau^{-2} n^{-1}$, где $n = (1 - m/2r) (1 + m/2r)^{-1}$. Показано также, что планеты в эйнштейновской метрике движутся с постоянными скоростями на постоянных расстояниях от центрального тела. При этом, как и в ГБЧ, $r_A \sim t^{-1} r_E$, и планеты действительно приближаются к центру при рассмотрении в атомной системе единиц.

Таким образом, в этом подходе даже при уменьшении гравитационной постоянной в атомной шкале времени возможно уменьшение периода. Данные ван Фландерна [32] свидетельствуют в пользу второго варианта. Более точные оценки, очевидно, будут получены из анализа данных по локации планет, в частности Марса, с помощью, например, проекта «Викинг» и др.

После появления новых работ Дирака, Малина и др. были проведены различные проверки их теорий с использованием как старых, так и новых тестов. Основными тестами можно считать получение следующих данных: 1) об эволюции Солнца и звезд; 2) о содержании водорода, гелия и дейтерия; 3) о температуре Земли; 4) о реликтовой температуре; 5) о потоке нейтрино от Солнца; 6) о динамике самогравитирующих объектов; 7) о соотношении $\ln N - \ln S$ для радиогалактик; 8) о $H - R$ -диаграмме для шаровых скоплений; 9) о соотношении красное смещение — звездная величина для эллиптических галактик; 10) о периоде обращения и радиусе планет; 11) о замедлении пульсара $\mathcal{U}P$ 1953, о параметре замедления и др. Почода и Шварцшильд в 1964 г. показали, что старый (1938 г.) вариант гипотезы Дирака противоречит данным по эволюции Солнца, так как при $G \sim t^{-1}$ оно бы эволюционировало слишком быстро в прошлом и сейчас было бы на стадии красного гиганта. Аналогичный аргумент относится и к ГАРД. Тот же самый вывод относительно гипотезы Дирака 1938 г. и ГАРД следует и из работы Гамова [43], в которой использован метод гомологических преобразований уравнений звездной структуры для исследования эволюции Солнца. В предположении, что меняется только $G = G_0 (t_0/t)$, он получил: $L \sim L_0 (t_0/t)^{7/8}$. Полная излученная энергия за время от t_1 до t_0 оценивается как

$$E = \int_{t_1}^{t_0} L(t) dt = \frac{1}{6,8} L_0 t_0 [(t_0/t_1)^{6,8} - 1];$$

она сравнивается с запасом энергии ε в конвективном ядре Солнца для реакции $H \rightarrow He$: $\varepsilon \approx 7,2 \cdot 10^{50}$ эрг, $E \leq \varepsilon$, откуда $t_0/t_1 \leq 1,28$ для $L_0 \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг $\cdot$ с $^{-1}$ и $t_0 = 1,2 \cdot 10^{10}$ лет. При этом $t_0 - t_1 > 2,4 \cdot 10^9$ лет, что меньше возраста Солнечной системы (4—5 млрд. лет). Тогда в настоящее время Солнце не могло бы быть звездой основной последовательности. Отсюда делается вывод, что гипотеза Дирака 1938 г. и ГАРД противоречат данным наблюдения. В ГМРД $L/L_0 = (t/t_0)^{3,15}$, и аналогичный подход дает $t_1 H_0 > -1$, что выполняется всегда.

Кануто и Лоденкэ (1977 г.) показали, что ГМРД согласуется также с данными о том, что Вселенная относится к открытому типу, и с соотношением $\ln N - \ln S$ для радиогалактик. Аномально малое значение $\dot{P}/P$ для пульсара $\mathcal{U}P$ 1953 тоже находит объяснение в рамках ГМРД. Доводы в пользу ГМРД приведены также Мэнсфилдом и Малином (1976 г.), которые показали, что из оценок эволюции гигантских эллиптических галактик следуют такие значения параметра замедления, которые согласуются с теорией Малина и ГМРД, но не согласуются с ГАРД и теорией Хойла—Нарликара. Льюис в 1976 г. исследовал влияние вариаций гравитационной постоянной на динамику самогравитирующих объектов численными методами с помощью полученных Винти (1974 г.) соотношений, связывающих секулярные изменения большой полуоси, вариации G , период орбит двух точечных масс и среднее угловое ускорение при движении по орбите. Льюис вычислил современные скорости удаления первоначально связанных, но уже распавшихся систем. Эти значения скорости хорошо согласуются с постоянной Хаббла. С учетом вариаций G он проанализировал также проблему устойчивости галактик и скоплений галактик и показал, что при этом вириальная масса увеличивается на порядок по сравнению со случаем $G = \text{const}$. Сделан вывод, что переменность G может помочь объяснить существование скрытой массы. При анализе моделей эллиптических галактик с переменной G Льюис объяснил наблюдаемый малый разброс абсолютных звездных величин ярчайших звезд и их независимость от размера и богатства скопления. Чин и Стотерс (1975 г.) отвергли ГАРД ввиду: 1) слишком большого начального содержания водорода, необходимого в этой модели; 2) противоречия с палеонтологическими данными [19]; 3) получающегося слишком большого (превышающего верхнюю границу, найденную Дэвисом [44]) потока нейтрино от Солнца. Для проверки ГМРД они проанализировали несколько последовательностей моделей звезд при различных значениях их начальных параметров. Ими показано, что конечные значения этих параметров в ГМРД почти такие же, как и в обычной теории ($G = \text{const}$), несмотря на большой разброс начальных значений массы. Это объясняется тем, что отношение светимости к массе остается практически постоянным из-за действия двух компенсирующих факторов: большие значения G ведут к уменьшению светимости, а меньшие значения массы звезд — к ее увеличению. Аналогичный анализ с использованием ГАРД и ГМРД для моделей старых скоплений провел Вандерберг в 1976, 1977 гг. Он рассчитал изохроны и функции светимости этих скоплений и пришел к выводу, что в рамках ГАРД шаровые скопления были бы моложе Солнца, а это, естественно, неприемлемо. При учете ГМРД теоретические диаграммы цвет — звездная величина почти идентичны стандартным (при постоянных G и M), поэтому наблюдаемые $H - R$ -диаграммы не могут служить тестом ГМРД. Мадер (1977 г.) для определения «жизнеспособности» трех вариантов космологических теорий Дирака с вариациями гравитационной постоянной (гипотезы 1938 г., ГАРД и ГМРД) привлекает следующие астрофизические тесты: 1) модель Солнца; 2) изучение скопления М67; 3) определение температуры Земли; 4) определение потока нейтрино от Солнца. Он показал,

что гипотезы, в которых массы макроскопических тел не меняются (теория 1938 г. и ГАРД), должны быть отвергнуты, так как: 1) для объяснения современной светимости Солнца необходимы большие изменения химического состава; 2) форма изохрон совершенно не соответствует последовательности старых скоплений; 3) для некоторых значений массы звезд время жизни звезды — красного гиганта может быть больше, чем время жизни звезды главной последовательности; 4) поток нейтрино от Солнца в этих моделях гораздо больше, чем в стандартных моделях, что не наблюдается. Анализ с учетом ГМРД привел его к следующим результатам: 1) модель Солнца со стандартным составом через $4,6 \cdot 10^9$ лет дает светимость, не отличающуюся от современной в пределах 2%; 2) новые изохроны, полученные в $H - R$ -диаграмме, не отличаются от стандартных моделей: для М67 основные черты последовательности воспроизводятся и изменение возраста не требуется; 3) поток нейтрино от Солнца в 2 раза меньше, чем в обычных моделях, поэтому проблемы солнечного нейтрино не возникает; 4) поток солнечной энергии на Земле в прошлом такой же, как и в старых моделях, поэтому никаких сложностей с изменением климата нет. В целях проверки гипотез Дирака проанализирована также диаграмма Хаббла — Сендейджа красное смещение — звездная величина для эллиптических галактик с учетом эволюционных поправок на эволюцию звезд. Получено, что гипотеза Дирака без рождения вещества и ГАРД противоречат наблюдениям, так как дают слишком большую яркость галактик, а ГМРД согласуется с данными наблюдений. Мадер сделал вывод о том, что ГМРД при оценке с помощью данных тестов не уступает стандартным моделям, а кое в чем имеет преимущества перед ними. Трудностями, с которыми сталкивается ГМРД, являются малые значения светимости белых карликов ($0,2 L_{\odot}$ вместо наблюдаемых $L \approx 10^{-2} \div 10^{-3} L_{\odot}$), а также тепловой характер фонового трехградусного излучения, который не укладывается в рамки ГБЧ, поэтому приходится предполагать, что излучение образуется не в результате большого взрыва, а каким-либо другим способом. Однако Лоденкей провел детальный анализ светимости белых карликов и не получил нижней границы как для ГМРД, так и для ГАРД.

Таким образом, из всех этих астрофизических тестов следует, что наиболее жизнеспособной является ГМРД, хотя и ей присущи некоторые недостатки. Данные же по движению планет [32] выделяют ГАРД и вариант Дирака 1979 г. без рождения материи.

1.5. МАСШТАБНО-КОВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ КАНУТО И АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Основы теории. Поскольку ГБЧ Дирака устанавливает лишь некоторые закономерности процессов микро- и макромира, возникает необходимость создания такой теории, в которой, с одной стороны, присутствовали бы эти закономерности, а с другой, использовался бы потенциал теории гравитации Эйнштейна. Такие попытки предприняты в [45 — 47].

Кануто с сотрудниками [45] развил масштабно-ковариантную теорию гравитации, первоначально предложенную Дираком [47], в основе которой лежат локальные конформные преобразования, связываемые с использованием различных динамических систем для измерения пространственно-временных интервалов. Предполагается, что каждый тип взаимодействия (пока нет объединенной теории) определяет свой способ измерения, а именно систему отсчета, которая подчиняется динамическим законам соответствующего взаимодействия. При этом возникают в принципе независимые системы единиц для взаимодействий разных типов. Например, для гравитационного взаимодействия характерны астрономическая единица длины (расстояние от Земли до Солнца) и секунда, определяемая через эфемеридное время (по периоду движения Земли вокруг Солнца). Принятая в настоящее время СИ и соответствующие эталоны времени-частоты и длины (атомные единицы) основаны на электромагнитных взаимодействиях (квантовая электродинамика) *. Априори ниоткуда не следует, что эти две системы единиц, а также возможные другие, связанные, например, со слабыми и сильными взаимодействиями, согласованы в пространстве и времени. Вот эта идея о связи локальных конформных преобразований с использованием различных систем единиц, которая восходит к работам Вейля, Эддингтона, Дикке [16], Дирака [47], [3, 22] и др. с целью включения в теорию гравитации гипотезы Дирака и использована в [45]. В [45] предполагается, что в гравитационной системе единиц справедливы обычные уравнения Эйнштейна

$$\bar{G}_{\mu\nu} = -8\pi\bar{\mathcal{Y}}_{\mu\nu} + \bar{\Lambda}g_{\mu\nu}.$$

Чтобы записать соответствующие уравнения в произвольной системе единиц, от линейного элемента, записанного в гравитационной системе $\bar{ds}^2 = \bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ с помощью конформного преобразования $\bar{ds} \rightarrow ds = \beta^{-1}(x)\bar{ds}$ осуществлен переход от геометрии с $\bar{g}_{\mu\nu}$ к геометрии, описываемой $g_{\mu\nu} = \beta^{-2}\bar{g}_{\mu\nu}$, $\Lambda = \beta^2\bar{\Lambda}$, причем источник предполагается конформно-инвариантным: $\bar{\mathcal{Y}}_{\mu\nu} = \mathcal{Y}_{\mu\nu}$ или $\bar{G}\bar{T}_{\mu\nu} = G(\beta)T_{\mu\nu}$ (как только выбирается калибровка β , теория перестает быть конформно-инвариантной). В случае идеальной жидкости без давления это дает закон преобразования для G и плотности: $\beta^2\bar{G}\bar{\rho} = G(\beta)\rho(\beta)$. Таким образом, получены следующие уравнения гравитационного поля в произвольной системе единиц (β не фиксировано):

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + 2\frac{\beta_{\mu;\nu}}{\beta} - 4\frac{\beta_\mu\beta_\nu}{\beta^2} - g_{\mu\nu}\left(\frac{2\beta^\lambda{}_{;\lambda}}{\beta} - \frac{\beta^\lambda\beta_\lambda}{\beta^2}\right) = \\ = -8\pi\mathcal{Y}_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Известно, что такие уравнения можно получить, если применить вариационный принцип к действию:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (-\beta^2 R + G\beta^\mu\beta_\mu + C\beta^4 + 16\pi\mathcal{L}_m),$$

*Это не относится пока к эталону массы — платиновому цилиндру.

где $\mathcal{L}_m$ — лагранжиан материи. Нетрудно показать, что уравнение для β , получающееся при варьировании S по β , не является независимым уравнением поля. Оно содержится в уравнении гравитационного поля, что и должно быть ввиду произвольности β . Итак, уравнения (1.2) общеквариантны и конформно-инвариантны и в таком виде отражают наше незнание определенной связи между теорией гравитации и квантовой электродинамикой или соответствующими им системами единиц. Если бы существовала единая теория этих взаимодействий, то была бы одна система единиц, определяемая динамикой этой теории. Для описания гравитационных процессов в атомных единицах, т. е. для определения калибровки β , используются ГБЧ $G(\beta) = \bar{G}/t$ и два различных предположения относительно рождения материи: 1) при $M = \rho V = \text{const}$ из этих соотношений с учетом $\rho \bar{V} = \text{const}$, $V = \beta^{-3} \bar{V}$ можно получить $G = \bar{G}\beta^{-1}$, $\beta \sim t$; 2) при $M = \rho V \sim t^2$ из тех же соотношений получается $G = \bar{G}\beta$, $\beta \sim t^{-1}$. В метрике Робертсона — Уокера

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) (dr^2 / (1 - kr^2) + r^2 d\Omega^2),$$

где ds выражено в атомных единицах, уравнения (1.2) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}/R + \dot{\beta}/\beta + k/R^2 &= 8\pi G\rho/3 + \Lambda/3; \\ \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} \frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} &= -\frac{4\pi G}{3} (3p + \rho) + \frac{\Lambda}{3} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Получены космологические решения этих уравнений для различных уравнений состояния (пыль и излучение) и двух калибровок β (с рождением и без рождения материи) для различных типов моделей — открытой, закрытой и квазиевклидовой. В сферически-симметричной метрике вычислены три классических теста теории гравитации, которые не отличаются от предсказаний ОТО, за исключением секулярных вариаций с временным масштабом порядка возраста Вселенной, а также вариации периодов планет и радиусов их орбит. Из сравнения с данными ван Фландерна 1977 г. сделан вывод о предпочтительности открытой модели с рождением частиц, соответствующей калибровке $\beta \sim t^{-1}$. Что же касается объяснения большого числа $N \sim t^2$, то этого можно добиться при определенных значениях k и параметра замедления q_0 [45]. Для первого предположения, если $\Lambda = 0$, то $k = 0$, $R \sim t^{1/3}$, $H_0 t_0 = 1/3$, $q_0 = 2$, а для второго, если $\Lambda = 0$, то $R \sim t$, $H_0 t_0 = 1$, $q_0 = 0$ с точностью до медленно меняющихся функций t , таких как $\ln t$. Как уже указывалось, в гипотезах Дирака 1938 и 1974 гг. встречаются трудности с объяснением реликтового излучения. Те же трудности возникают и в вариантах Кануто, которые к ним сводятся: $\beta \sim t$ и $\beta \sim t^{-1}$. Поэтому в [48] исследована еще одна калибровка, согласующаяся с тестом по реликтовой температуре. Из требования, чтобы ρ_γ вело себя, как в стандартной космологии ($\rho_\gamma \sim R^{-4}$), получено $G\beta^2 = 1$, что с учетом гипотезы Дирака $G \sim t^{-1}$ дает $\beta \sim t^{1/2}$. При этом и второе соотношение Дирака удовлетворяется: $N_n \sim \rho_m (ct)^3 \sim t^2$,

$R = R_0 (t/t_0)^{1/2}$. Данному случаю соответствует модель $k = 0$, $H_0 t_0 = 1/2$, $q_0 = 1$ [точное решение уравнения (1.3) при $\Lambda = 0$, $p_m = 0$].

На другую трудность в теории Кануто указал Мадер (1978 г.). В рамках этой теории он проанализировал эволюцию звезд на достаточно ранних этапах и показал, что в прошлом должны были быть звезды, весьма отличные от современных, с большей скоростью ядерных превращений и большей светимостью на единицу массы. Но самый главный вывод Мадера — синтез первичного гелия в масштабно-ковариантной теории несуществен и современное содержание гелия должно найти объяснение в процессах, происходящих в звездах на начальных стадиях их эволюции.

Определение температуры фонового излучения — тест теорий гравитации. Одним из важных космологических тестов, как отмечали Дирак [49] и Стейгман (1978 г.), является тест по определению температуры реликтового излучения. При этом существенно, что понимать под числом нуклонов (объемом, в котором они находятся) во Вселенной. Наиболее естественным было бы понимать под этим горизонт частиц, но во многих космологических моделях, в частности использованных Дираком и Кануто, горизонта нет, если динамика прослеживается до ранних эпох. Поэтому обычно используют хаббловский объем $V_H(t) = (cH^{-1})^3$. Тогда число нуклонов во Вселенной $\mathcal{N}(t) = n(t) V_H(t) \sim \sim nH^3 \sim N (da/dt)^{-3}$, так как $H(t) = a^{-1} da/dt$, где $N(t) = na^3$ — число частиц в сопутствующем объеме. Согласно гипотезе Дирака

$$\mathcal{N}(t) \sim t^2; N(t) \sim t^2 (da/dt)^3.$$

Поэтому $\mathcal{N}$ может меняться либо за счет рождения нуклонов, $N \sim \sim t^2$, либо за счет вариации масштабного фактора при $N = \text{const}$ ($a \sim t^{1/2}$), либо в результате действия обоих этих факторов. Если $a(t) \sim t^l$, то $N(t) \sim t^{(3l-1)}$. При $l = 1/3$ рождения нет. Число фотонов в настоящее время $\mathcal{N}_\gamma(t) \rightarrow 10^{90}$ тоже является большим числом. Согласно ГБЧ

$$\mathcal{N}_\gamma(t) \sim t^{2+\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1/4; \quad \mathcal{N}_\gamma(t) = n_\gamma(t) V_H(t) = \mathcal{N}(t) N_\gamma(t)/N(t).$$

Отсюда следует, что если число нуклонов сохраняется ($N = \text{const}$), то $N_\gamma \sim t^\varepsilon$, и фотоны рождаются, а если $N_\gamma = \text{const}$, то $N \sim t^{-\varepsilon}$, и число нуклонов уменьшается. Если рассматривать планковский спектр фотонов, то

$$n_p \sim T^3, \quad \rho_p \sim T^4, \quad \rho_p \sim n_p^{4/3}.$$

Из космологического принципа (изотропии и однородности Вселенной, подтверждаемых отсутствием анизотропии микроволнового и рентгеновского фона) следует, что для фотонов ($ds = 0$)

$$1 + z = \lambda_0/\lambda_\varepsilon = v_\varepsilon/v_0 = a_0/a_\varepsilon, \quad (1.4)$$

где индекс «э» означает время эмиссии; индекс нуль — современную эпоху. Тогда $\rho_\gamma/n_\gamma^{4/3} = v_\gamma/n_\gamma^{1/3} = a(t) v_\gamma(t) [N_\gamma(t)]^{-1/3} = \text{const}$. Из (1.4) следует $a v = \text{const}$, поэтому планковский спектр будет со-

храняться во время всей эволюции, если $N_\gamma(t) = \text{const}$, т. е. число фотонов в сопутствующем объеме не должно меняться. Согласно ГБЧ

$$N_\gamma(t) = \mathcal{N}_\gamma(t) (da/dt)^3 \sim t^{3(l-1/4)}.$$

Только при $l = 1/4$ нет рождения фотонов и сохраняется планковский спектр реликтового излучения. Все варианты Дирака, исследованные Кануто ($a \sim t$, $a \sim t^{1/3}$, $a \sim t^{1/2}$), не дают этой зависимости, и только если предположить, что $N_\gamma(t) \approx N(t)$, то допускается вариант $a \sim t^{1/3}$. Но при этом следует считать, что число 10^{10} не подчиняется ГБЧ. Остается, конечно, возможность, что трехградусное электромагнитное фоновое излучение не является реликтовым.

Определение содержания гелия и дейтерия как тест космологических теорий. Другим важным космологическим тестом является наблюдаемое во Вселенной содержание гелия и дейтерия. В рамках стандартной теории большого взрыва данный тест находит удовлетворительное объяснение. Он основан на определении температуры T_f , при которой сравниваются временной масштаб слабых взаимодействий $t_{\text{сл}} = g_{\text{сл}}^{-2} \hbar^7 (kT)^{-5} = 10^{50} T^{-5}$ с и временной масштаб расширения, т. е. адиабата температура—время $t_p(T)$, и далее—вычисляется $(n/p)_f \sim \exp[(m_p - m_n) c^2 / kT_f]$. В предположении, что $G \sim t^{-n}$ и $G \rho t^2 = \text{const}$, Барроу в 1978 г., используя результаты работ Вагонера (1973 г.) и Ривза (1974 г.), получивших, что наблюдаемое содержание гелия $X(^4\text{He}) = (25 \pm 3)\%$ ограничивает отклонение ξ от фридмановской скорости расширения значениями $\xi = 1 \pm 0,2$, нашел, что $5,9 \cdot 10^{-3} < n < 7,0 \cdot 10^{-3}$. Отсюда для современной зависимости $R \sim t^{(2-n)/3}$ в квазиевклидовой модели с веществом в виде пыли

$$|\dot{G}/G| = |n/t_0| = |[3n/(2-n)] H_0| < (1,5 \pm 0,7) \cdot 10^{-12} \text{ год}^{-1}.$$

Этот результат практически исключал бы все гипотезы, согласующиеся с гипотезой Дирака относительно вариаций G . Однако Барроу использовал оценку для ξ при температуре, когда содержание нейтронов относительно протонов «размораживается». Кроме того, Барроу применял космологическое уравнение $(\dot{R}/R)^2 = \rho G(t) \text{const} - k/R^2$, которое, как заметил Бишоп (1979 г.), не выполняется во многих обобщенных скалярно-тензорных теориях гравитации. На конкретном примере одного из вариантов скалярно-тензорной теории гравитации, обобщающего теорию Бранса—Дикке, он показал, что определение содержания гелия не является тестом теорий с возможными вариациями эффективной гравитационной постоянной, хотя и дает ограничения на другой параметр теории.

В работах Кануто с сотрудниками неоднократно подчеркивалось, что использование в различных тестах соотношений, следующих из теории Эйнштейна с заменой G величиной $G(t)$, не является последовательным. Анализ необходимо проводить в рамках конкретной теории, реализующей тот или иной вариант гипотезы Дирака. В частности, Фалик в 1979 г. проанализировал проблему первичного содержания гелия в том варианте теории Кануто, который согласуется с данными по реликтовой температуре $\beta \sim t^{1/2}$. Он показал, что при этом $tT^4 =$

$= \text{const}$, $tT^4 < 10^{33}$, и тогда при температуре 10^9 К хаббловский возраст Вселенной был бы менее 10^{-3} с, что намного меньше возраста 100 с, необходимого для образования первичного гелия. Кануто недавно доказал, что Фалик сделал ошибку, используя соотношение, справедливое только при $G = \text{const}$.

Определение периода обращения планет — тест теорий с вариациями констант. Кануто с сотрудниками [50] детально проанализировали проблему калибровки $\beta(t)$ с помощью экспериментов по определению параметров движения планет. В рамках масштабно-инвариантной теории они получили следующее:

$$\dot{n}/n = - (GM)' / GM = - \dot{R}/R = \dot{\beta}/\beta,$$

где $n = 2\pi/T$ (T — период движения по орбите); R — радиус орбиты. Этот результат получен из обобщенного соотношения $GM\beta = \text{const}$, заменившего ньютоново и эйнштейновское $G_E M_E = \text{const}$. Используя данные трех групп по наблюдаемым вариациям n для Луны в атомном времени и учитывая вклад от приливных эффектов, они получили, что

$$\frac{\dot{n}}{n} = \begin{cases} (3,6 \pm 2,9) \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1}; \\ (3,1 \pm 2,0) \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1}; \\ (4,8 \pm 2,4) \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1} \end{cases}$$

соответственно, т. е. $\dot{n}/n > 0$. Отсюда $(GM)' < 0$, $\beta > 0$, и из трех вариантов калибровки β исключается лишь вариант Дирака с рождением вещества, в котором $\beta \sim t^{-1}$; $\dot{\beta} < 0$, $GM \sim t$, $(GM)' > 0$. Кануто с сотрудниками [51] в рамках конформно-ковариантной теории гравитации проанализировали следующие соотношения: 1) звездная величина — красное смещение для эллиптических галактик; 2) для параметра эволюции; 3) метрический угловой диаметр — красное смещение; 4) f и $N(m)$ — звездная величина для квазаров и их m — z -соотношение для четырех калибровок $\beta(t) = (t_0/t)^\epsilon$, где $\epsilon = \pm 1, \pm 1/2$. Эти значения соответствуют теориям Дирака 1938, 1973, 1979 гг. и теории Кануто 1978 г. ($G \sim \beta^{-1}$, β , β^{-2} , β^2). Для всех этих калибровок не обнаружено противоречий новой теории с данными наблюдений. Подсчитано также число радиоисточников $N(s)$, т. е. число радиоисточников с наблюдаемым потоком, большим s . Найдено, что при $G \sim t^{-1}$ имеется согласие с данными наблюдений, причем учет эволюции так же необходим, как и в стандартной модели. Кроме того, как и при анализе движения планет, при $\epsilon < 0$ допускается только Вселенная открытого типа, а при $\epsilon > 0$ результаты аналогичны стандартной модели.

Определение светимости Солнца и температуры Земли — тест теорий гравитации. Этот тест был предложен Теллером [19], который доказал, что светимость Солнца L по грубой оценке пропорциональна $G^7 M^5$. Поток солнечной энергии, падающий на Землю, $\Phi \sim L/R^2$, поэтому температура Земли $T \sim (R^2/L)^{-1/4} \sim (G^7 M^5/R^2)^{1/4}$. В гипотезе Дирака 1938 г. и ГАРД $R \sim G^{-1}$, $G \sim t^{-1}$, поэтому $T = T_0 (t_0/t)^{9/4}$, т. е. температура Земли сильно зависит от возраста Вселенной. При этом возникают противоречия с биологической эволюцией на Земле. В ГМРД $G \sim t^{-1}$, $M \sim t^2$, $R \sim t$ и $T = T_0 (t/t_0)^{1/4}$, т. е. $4 \cdot 10^8$ лет

назад температура Земли составила бы 99% сегодняшней, и никаких противоречий с биологической эволюцией нет. Однако применение этого теста на самом деле затруднено из-за недостаточных знаний климата Земли и его эволюции. Кроме того, в конкретных теориях с вариациями констант зависимость $T(t)$ будет различна.

1.6. ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ С КОНФОРМНЫМ ХИГГСОВСКИМ ПОЛЕМ

Общий формализм. Теория гравитации с фундаментальным конформно-инвариантным скалярным полем без учета самодействия впервые рассмотрена в [6,7]. Ее связь с ГБЧ проанализирована в [46]. В дальнейшем как ее обобщение предложен вариант теории гравитации с конформным хиггсовским полем с учетом самодействия скалярного поля [52 — 54], который при достаточно больших характерных размерах объектов сводится к [6, 7, 46]. Следуя [52], запишем эффективный лагранжиан системы в виде

$$L = L_g + L_\varphi + L_m, \quad (1.5)$$

где принято, что $c = \hbar = 1$; $L_g = (R - 2\Lambda)/2\kappa$ — лагранжиан гравитационного поля с учетом космологической постоянной Λ ;

$$L_\varphi = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi^* \nabla_\beta \varphi - (m^2 + R/6) \varphi^* \varphi - (\lambda/6) (\varphi^* \varphi)^2 \quad (1.6)$$

— лагранжиан скалярного поля, конформно-инвариантного при $m=0$; L_m — лагранжиан других полей и макроскопической материи, включающий, в частности, и лагранжианы взаимодействия; $\kappa = 8\pi G/c^4$ — эйнштейновская гравитационная постоянная. Под $L_\varphi + L_m$, в частности, можно подразумевать и лагранжиан типа Вайнсберга — Салама, записанный в ковариантном виде. В гл. 5 будет подробно исследована роль квантовых вакуумных эффектов в этой теории, в частности будет показано, что эйнштейновский член можно явно не вводить: он появляется в результате спонтанного нарушения конформной симметрии. Там же будет показано, что спонтанное нарушение калибровочной симметрии приводит к отсутствию сингулярного состояния в однородной и изотропной космологической модели. Здесь мы остановимся еще на одном достоинстве этой теории, а именно на возможности объяснения вариаций эффективной гравитационной постоянной в атомной системе единиц.

Конформные преобразования и вариации констант [46]. В литературе неоднократно подчеркивалось, что ГБЧ нельзя экстраполировать на ранние этапы эволюции Вселенной: на малых радиусах, как показал Стейгман в 1976 г., она приводит к некоторым трудностям типа нарушения однородности и др. При достаточно больших радиусах Вселенной $a \gg m^{-1}$ в теории с лагранжианом (1.5) можно пренебречь самодействием скалярного поля. Тогда (2.5) будет принадлежать к классу лагранжианов скалярно-тензорных теорий вида

$$L = [(R/2\kappa) h(\varphi) + (1/2) l(\varphi) \varphi_{,\mu} \varphi^{,\mu} + \Lambda(\varphi) + L_m] \sqrt{-g}, \quad (1.7)$$

где R — скалярная кривизна риманова пространства; L_m — плотность лагранжиана материальных полей; $h(\varphi)$ и $l(\varphi)$ — произволь-

ные функции скалярного поля φ ; $\Lambda(\varphi)$ — переменный космологический член (по-видимому, впервые введенный в [6]).

Частный выбор функций $h(\varphi)$ и $l(\varphi)$ фиксирует тот или иной вариант скалярно-тензорной теории гравитации. Например, в теориях гравитации с нарушенной конформной инвариантностью

$$h(\varphi) = 1 \pm (\kappa/6) \varphi^2, \quad l(\varphi) = \pm 1,$$

причем знак плюс в $h(\varphi)$ и $l(\varphi)$ соответствует отрицательному вкладу энергии скалярного поля, а знак минус — случаю конформно-инвариантного материального скалярного поля с положительным вкладом энергии скалярного поля [6].

Экспериментальные следствия теорий, описываемых лагранжианом (1.7), детально рассмотрены в [55]. В частности, в этой работе и в [7] получены точные статические сферически-симметричные решения полевых уравнений, соответствующих лагранжиану (1.7), и вычислены параметры Эддингтона — Робертсона — Шиффа. Конкретные значения этих параметров для различных вариантов скалярно-тензорных теорий гравитации определяют аналоги известных эффектов ОТО. Так, эффект отклонения световых лучей и радиоволн в гравитационном поле Солнца существенно зависит от φ_0 , т. е. космологического значения поля φ . Представляет экспериментальный интерес новый эффект, предсказываемый скалярно-тензорными теориями, — зависимость гравитационной постоянной от расстояния до центрального тела, которую в принципе можно измерить при условии повышения точности современных гравиметрических приборов.

Теории гравитации, описываемые лагранжианом (1.7), соответствуют переменной гравитационной постоянной. Произведем конформные преобразования метрики

$$g_{\mu\nu} = h^{-1}(\varphi) \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Тогда законы преобразования $g^{\mu\nu}$, $\sqrt{-g}$, R будут иметь вид:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= h(\varphi) \bar{g}^{\mu\nu}; \quad \sqrt{-g} = h^{-2}(\varphi) \sqrt{-\bar{g}}; \\ R &= h(\varphi) [\bar{R} + 3 \bar{\square} \ln h(\varphi) - (3/2) \{ \ln h(\varphi) \}_{,\mu} \times \\ &\quad \times \{ (\ln h(\varphi))_{,\mu} \}], \end{aligned}$$

где черта означает, что величины берутся в метрике $\bar{g}_{\mu\nu}$. С учетом последнего лагранжиан (1.7) [$\Lambda(\varphi)$ полагаем равным нулю] приводится к квазиэйнштейновскому виду

$$\bar{L} = [\bar{R}/2\kappa + (1/2) \Phi(\varphi)_{,\mu} \varphi_{,\nu} \bar{g}^{\mu\nu} + h^{-2}(\varphi) L_m] \sqrt{-\bar{g}}, \quad (1.9)$$

где

$$\Phi(\varphi) = \left[\frac{l(\varphi)}{R(\varphi)} - \frac{3}{2\kappa} \frac{h'^2(\varphi)}{h^2(\varphi)} \right]; \quad h'(\varphi) \equiv dh/d\varphi.$$

Лагранжиану (1.9) соответствуют следующие полевые уравнения:

$$\bar{G}_{\mu\nu} \equiv \bar{R}_{\mu\nu} - (1/2) \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = \kappa \bar{T}_{\mu\nu} - \bar{\Phi}(\varphi) \bar{\tau}_{\mu\nu}; \quad (1.10)$$

$$\square \varphi + (1/2) \varphi_{,\mu} \varphi^{,\mu} \frac{d \ln \Phi(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{\bar{\Phi}(\varphi)} \frac{\partial \sqrt{-\bar{g}} \bar{L}_m}{\sqrt{-\bar{g}} \partial \varphi}, \quad (1.11)$$

где $\bar{\tau}_{\mu\nu}$ — обычный тензор энергии-импульса безмассового скалярного поля; $\bar{\Phi}(\varphi) = \kappa \Phi(\varphi)$; $\bar{L}_m = h^{-2}(\varphi) L_m$.

Известно, что при преобразовании скалярного поля

$$\psi = \psi(\varphi); \quad \left| \frac{d\psi}{d\varphi} \right|^2 = \left| \frac{l(\varphi)}{h(\varphi)} - \frac{3}{2\kappa} \frac{h'^2(\varphi)}{h^2(\varphi)} \right| \quad (1.12)$$

лагранжиан (1.9) приводится к виду

$$\mathcal{L} = [\bar{R}/2\kappa + (\alpha/2) \psi_{,\mu} \psi^{,\mu} + h^{-2} L_m] \sqrt{-\bar{g}}, \quad (1.13)$$

где

$$\alpha = \text{sgn} \left[\frac{l(\varphi)}{h(\varphi)} - \frac{3}{2\kappa} \frac{h'^2(\varphi)}{h^2(\varphi)} \right], \quad (1.14)$$

т. е. к обычному эйнштейновскому виду с тем отличием, что лагранжиан материальных полей взаимодействует со скалярным полем.

Рассмотрим частные случаи скалярно-тензорных теорий гравитации с нарушенной конформной инвариантностью. По отношению к конформно-инвариантным теориям они обладают тем преимуществом, что в них скалярное поле представляет собой не произвольную функцию, а истинное динамическое поле, поэтому связь между различными системами (в духе идей Дирака) вполне определенная. Тогда для $h^+(\varphi)$, $l^+(\varphi)$, преобразуя скалярное поле по закону

$$\psi(\varphi) = \sqrt{6/\kappa} \arctg(\sqrt{\kappa/6} \varphi), \quad (1.15)$$

имеем

$$L = (\bar{R} + \kappa \psi_{,\mu} \psi^{,\mu} + 3\kappa \bar{L}_m) \sqrt{-\bar{g}}, \quad (1.16)$$

где

$$\bar{L}_m = \cos^4 \sqrt{\kappa/6} \psi L_m. \quad (1.17)$$

Полученному лагранжиану после варьирования по скалярному полю ψ и компонентам метрического тензора $\bar{g}^{\mu\nu}$ соответствует система полевых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu} &\equiv \bar{R}_{\mu\nu} - (1/2) \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = \kappa \bar{T}_{\mu\nu} - \bar{\tau}_{\mu\nu}; \\ \square \psi &= -f(\psi) \bar{T}, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{\mu\nu} &= \kappa (\psi_{,\mu} \psi_{,\nu} - (1/2) \bar{g}_{\mu\nu} \psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha}); \\ f(\psi) &= \sqrt{\frac{\kappa}{6}} \text{tg} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{6}} \psi \right); \quad \bar{T} = (2\bar{g}_{\mu\nu} / \sqrt{-\bar{g}}) \times \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\times \frac{\partial (V \sqrt{-g} \bar{L}_m)}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}. \quad (1.20)$$

Для $h^-(\varphi)$, $l^-(\varphi)$ преобразование

$$\psi(\varphi) = V\sqrt{6/\kappa} \operatorname{arcth} (V\sqrt{\kappa/6} \varphi) \quad (1.21)$$

приводит к уравнениям, аналогичным (1.18), с тем лишь отличием, что изменяется знак перед тензором энергии-импульса скалярного поля, а функция $f(\psi)$ определяется как

$$f(\psi) = -V\sqrt{\kappa/6} \operatorname{th} (V\sqrt{\kappa/6} \psi).$$

Видно, что конформные преобразования метрики можно использовать как некоторый математический прием, приводящий к уравнениям поля эйнштейновского типа. Можно также попытаться придать им физический смысл, связанный с преобразованиями системы единиц. Действительно, если метрика преобразуется согласно (1.8), то единица длины преобразуется по закону $\bar{l} = h^{1/2}(\varphi) l$. Тогда очевидно, что закон преобразования единицы времени должен быть аналогичным, ибо в противном случае скорость света будет неинвариантна относительно преобразования системы единиц. Что же касается преобразования массы частиц, то требование инвариантности постоянной Планка приводит к соотношению $\bar{m} = h^{-1/2} m$. Как мы видим, массы всех частиц меняются одинаково, что согласуется с результатами экспериментов по проверке принципа эквивалентности.

Подчеркнем, что используемые нами конформные преобразования дают другой вариант теории гравитации (1.18) — квазиэйнштейновский — с переменными массами частиц, зависящими от скалярного поля, и постоянной κ , в котором основными единицами (постоянными масштабами) являются G , c , $\hbar$ или планковские масса, длина и время

$$m_L = (\hbar c/G)^{1/2}; \quad L = \hbar m_L^{-1} c^{-1}; \quad t_L = Lc^{-1},$$

не зависящие от свойств частиц.

Известно, что Пуанкаре-инвариантность гарантирует постоянство массы покоя частиц, однако в присутствии гравитации последняя не имеет места, и тем самым из теоретических соображений не вытекают никакие запреты на гипотезу о переменной массе. При обратном преобразовании к (1.7) получается вариант с переменной κ и неизменными c , $\hbar$, m .

Отметим, что в рамках сформулированного нами варианта теории с переменными массами (1.18) уравнения движения пробных тел меняются по сравнению с ОТО. Для расчета эффектов геодезического движения можно получить обобщенные формулы, аналогичные формулам Эддингтона — Робертсона — Шиффа.

Рассмотрим теперь в рамках теории гравитации, описываемой системой полевых уравнений (1.18), однородную и изотропную космологическую модель (параллельно исследуем случай конформно-инвариантного поля, отличающийся знаком и формулами перехода от ψ к φ).

Запишем выражение для интервала:

$$-ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + A^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)],$$

где $A = \sin \chi$, χ , $\text{sh } \chi$ — для эллиптического, квазиевклидова и гиперболического пространств соответственно.

Отличные от нуля компоненты тензора энергии-импульса материи в сопутствующей системе отсчета равны:

$$T_0^0 = -\varepsilon; \quad T_k^l = \delta_k^l p,$$

где ε — плотность энергии; p — давление.

Выберем в качестве уравнения состояния следующее: $\varepsilon - 3p = 0$ (ультрарелятивистский случай). Тогда уравнение скалярного поля в системе (1.18) примет вид:

$$(d/dt)(a^3\dot{\psi}) = 0, \text{ где } \dot{\psi} = d\psi/dt.$$

Интегрирование его дает

$$\dot{\psi}a^3 = b, \quad (1.22)$$

где b — постоянная, определяющая характер поведения поля ψ в процессе расширения.

С учетом (1.22) система двух уравнений для метрического поля в (1.18) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} -(3/a^2)(\dot{a}^2 + \beta_1) &= -\kappa\varepsilon + (\sigma/2)\kappa b^2/a^6; \\ -(1/a^2)(\beta_1 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) &= \kappa p - (\sigma/2)\kappa b^2/a^6, \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

где $\beta_1 = 1, 0, -1$ соответственно для трех типов рассматриваемых пространств; $\sigma = 1$ соответствует отрицательному вкладу энергии скалярного поля; $\sigma = -1$ — обычному.

Из (1.23) получим уравнение

$$(6/a^2)(\beta_1 + \dot{a}^2 + a\ddot{a}) = \sigma\kappa b^2/a^6,$$

интегрирование которого дает

$$\dot{a}^2 = -m/a^4 - \beta_1 + C_1/a^2, \quad (1.24)$$

где C_1 — постоянная; $m = \sigma\kappa b^2/6$.

Подстановкой (1.24) в первое уравнение системы (1.23) найдем

$$\varepsilon(a) = 3C_1/\kappa a^4,$$

откуда следует, что $C_1 > 0$, так как в противном случае плотность энергии $\varepsilon(a)$ была бы отрицательна.

При выбранном уравнении состояния $p = \varepsilon/3$; $\varepsilon a^4 = \varepsilon_0 a_0^4$, поэтому

$$E_0 = \frac{2\pi\pi^2\beta_2}{a_0} \left(\frac{3C_1}{\kappa} \right),$$

где $V = 2\pi^2\beta_2 a^3$ — объем пространства; $\beta_2 = 1, 2/3\pi, (1/\pi)$ [— $\chi_0 + (1/2)\text{sh } 2\chi_0$] — соответственно для эллиптического, квазиевклидова и гиперболического пространств. Отсюда постоянная C_1 выражается

через полную энергию:

$$C_1 = \kappa a_0 E_0 / 6\pi^2 \beta_2$$

(ε_0 , a_0 — начальные значения ε , a).

Определим теперь вид зависимости $a(t)$. Для этого необходимо проинтегрировать уравнение (1.24). В общем случае ($\beta_1 = 1, -1$) решения выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода. Ограничимся рассмотрением промежуточной модели. При $\beta_1 = 0$ интегрирование (1.24) дает:

$$\frac{1}{2} \frac{a \sqrt{C_1 a^2 - m}}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{m}{C_1^{3/2}} \ln |a \sqrt{C_1 a^2 - m}| = t + C_2,$$

где C_2 — постоянная, определяемая из начальных условий, причем $\sigma = 1$ ($m > 0$), а скалярное поле описывается выражением

$$\psi = (b/\sqrt{m}) \arccos (\sqrt{m}/\sqrt{C_1} a) + \text{const.}$$

Отсюда сразу следует вывод об отсутствии начальной сингулярности, $a \geq a_0$, что, как и в теории Хойла — Нарликара, обусловлено отрицательным вкладом энергии-импульса скалярного поля. Заметим, что в теории Бранса — Дикке при $\omega > -3/2$ все космологические решения сингулярны. Очевидно, последнее является следствием того, что скалярное поле ϕ этой теории представляет собой поле притяжения, и это усугубляет проблему начального сингулярного состояния.

Для второго рассматриваемого нами случая ($\sigma = -1$) начальная сингулярность не устраняется* (конформно-инвариантное скалярное поле при этом является полем притяжения), а зависимость $a(t)$ при $\beta_1 = 0$ определяется выражением

$$\frac{1}{2} \frac{a \sqrt{C_1 a^2 - m}}{C_1} - \frac{|m|}{2C_1^{3/2}} \ln | \sqrt{C_1} a + \sqrt{C_1 a^2 + |m|} | = t + C_3.$$

Интегрирование уравнения скалярного поля дает следующее выражение для $\psi(a)$:

$$\psi = \frac{-b}{\sqrt{|m|}} \ln \left| \frac{\sqrt{|m|} + \sqrt{C_1 a^2 + |m|}}{\sqrt{C_1} a} \right| + \psi_0.$$

При больших t масштабный фактор $a(t)$ в обоих рассматриваемых случаях изменяется как $a^2 \sim 2\sqrt{C_1} t$. Поскольку $\psi a^3 = b = \text{const}$, изменение ψ -поля со временем определяется выражением

$$\psi \sim \psi_0 - b/\sqrt{2} C_1^{3/4} t^{1/2}, \quad (1.25)$$

где ψ_0 — асимптотическое значение поля ψ .

Положим $\psi_0 = 0$ ($\sigma = \pm 1$). Как мы уже отмечали, релятивистские гравитационные эффекты определяются именно этой величиной. На-

*Если не вводим нелинейность типа $\lambda \phi^4$ и не рассматриваем механизм спонтанного нарушения симметрии (см. гл. 5).

пример, при $\sigma = 1$ отклонение радиоволн и лучей света в гравитационном поле Солнца находится из формулы

$$\chi = 4 (m/d) (1 + \bar{\gamma})/2,$$

где m — геометризованная масса Солнца; d — прицельное расстояние траектории светового луча или радиоволн; $\bar{\gamma} = \frac{\bar{A} - (\sqrt{\kappa/6}) k \psi_0}{\bar{A} + \sqrt{\kappa} k \psi_0 / \sqrt{6}}$; $\bar{A}$ и k — постоянные. При $\psi_0 = 0$ имеем такое же значение для χ , как и в ОТО, что согласуется с данными экспериментов по измерению этого эффекта.

Используя полученное решение для скалярного поля, запишем теперь закон изменения массы частицы со временем в планковских единицах:

$$\bar{m} = \begin{cases} (1 - b^2 \kappa / 4 C_1^{3/2} 6t) m, & \sigma = 1; \\ (1 + b^2 \kappa / 4 C_1^{3/2} 6t) m, & \sigma = -1. \end{cases}$$

Можно перейти также в систему единиц, в которых массы частиц постоянны, а эффективная гравитационная постоянная является функцией скалярного поля $\varphi = \varphi(\psi)$.

Поскольку $\kappa_{\text{эф}} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \cos^2(\sqrt{\kappa/6}\psi)$, $\sigma = 1$ и $\kappa_{\text{эф}} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \text{ch}^2(\sqrt{\kappa/6}\psi)$, $\sigma = -1$, выражения, определяющие асимптотические поведения $\kappa_{\text{эф}}$, имеют следующий вид [см. (1.25)]:

$$\kappa_{\text{эф}} = \begin{cases} \kappa (1 - A/t), & \sigma = 1; \\ \kappa (1 + A/t), & \sigma = -1, \end{cases} \quad (1.26)$$

где $A = b^2 \kappa / 12 C_1^{3/2}$ — постоянная.

Как следует из (1.26), в случае конформно-инвариантного материального скалярного поля ($\sigma = -1$) $\kappa_{\text{эф}}$ убывает со временем. Оценим величину этого эффекта, определив постоянную b из условия, что плотность энергии излучения и плотность энергии скалярного поля имеют один порядок. Постоянная C_1 определяется из выражения $\epsilon(a)$. Тогда при $\rho \approx 5 \cdot 10^{-30} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $t = 3 \cdot 10^{17} \text{ с}$ имеем для величины $(\dot{G}/G)_0$ следующую оценку:

$$(\dot{G}/G)_0 \approx -4 \cdot 10^{-11} \text{ год}^{-1}.$$

Этот результат при $\sigma = -1$ согласуется с приведенным выше результатом ван Фландерна [32] для квазиевклидовой космологической модели.

Выражения для $\kappa_{\text{эф}} = \kappa(t)$ можно получить и непосредственно без использования формул перехода от одной системы единиц к другой. Для этого необходимо рассмотреть (1.7) для частного случая теории гравитации с нарушенной конформной инвариантностью $\kappa_{\text{эф}} = \kappa(\varphi)$. Система полевых уравнений при этом имеет вид:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} / \tilde{A} + (1/\tilde{A}) \{ \tilde{A}_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \tilde{A}_{;\alpha}^{\alpha} - \sigma \kappa [\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha}] \};$$

$$\varphi_{;\alpha}^{\alpha} - (1/6) R \varphi = 0,$$

где $\tilde{A} = 1 + \omega (\kappa/6) \varphi^2$; $\sigma = \pm 1$; $\omega = \pm 1$ ($\sigma = -1$, $\omega = -1$ соответствует, как и прежде, материальному скалярному полю).

При рассмотрении однородной изотропной модели ограничимся выбором $\sigma = -1$, $\omega = -1$ и уравнением состояния $\varepsilon - 3p = 0$. Тогда для масштабного фактора метрики $a(t)$ получим выражение

$$a = \sqrt{2a_0 t - \beta_1 t^2}, \quad (1.27)$$

где $\beta_1 = 1, 0, -1$ для эллиптической, квазиевклидовой и гиперболической моделей соответственно. Интегрированием уравнения для скалярного поля получаем:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{C}{aa_0}, & \beta_1 = 0; \\ -\frac{C \sqrt{a_0^2 - a^2}}{a_0^2 a}, & \beta_1 = 1; \\ -C(a_0^2 + a^2)^{1/2}/a_0^2 a, & \beta_1 = -1, \end{cases} \quad (1.28)$$

где a_0, C — постоянные интегрирования; значение поля φ на бесконечности равно нулю. Плотность энергии определяется выражением $\varepsilon = 3a_0^2/\kappa a^4$.

Из формул (1.27) и (1.28) следует, что зависимость $\kappa = \kappa(t)$ вида (1.26) реализуется для квазиевклидовой модели, причем $\kappa(t)$ убывает со временем, если поле конформно-инвариантно ($\sigma = -1$).

Таким образом, результаты, получаемые асимптотически в двух разных системах единиц $c, \hbar, G \rightarrow \text{const}$ и $m, c, \hbar \rightarrow \text{const}$, совпадают и согласуются с ГБЧ.

1.7. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ВАКУУМ С УЧЕТОМ ВАРИАЦИЙ КОНСТАНТ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ [56, 57]

Планкеоны. В настоящее время не существует единой теории всех типов физических взаимодействий: гравитационного, слабого, электромагнитного и сильного. Поэтому интересно рассмотреть модельные схемы, в рамках которых можно надеяться получить важные закономерности микро- и макромира.

Рассматривается одна из таких схем — эвристическая модель гравитационного вакуума (см. гл. 6) как система излучающих планкеонов, с помощью которой получена формула для масс и характерных размеров устойчивых частиц.

Ниже показано, что эта модель совместима с известными гипотезами о вариациях фундаментальных физических констант (в атомной системе единиц — с гипотезой Дирака о вариации гравитационной постоянной).

Сделана попытка применить в рамках концепции планкеонного вакуума квантовую теорию рождения частиц в космологических метриках: рассмотрено рождение частиц почти замкнутыми планкеонами, которые моделируются как нестационарные фридмановские микровселенные. При этом в рамках гипотезы Дирака снова получена формула

для связи масс и характерных размеров нуклонов и Метагалактики. Показано, что минимальный масштаб Вселенной, совместимый с гипотезой гравитационного вакуума и гипотезой Дирака, равен характерной длине сильных взаимодействий.

Естественно считать, что теория, описывающая основные свойства пространства-времени и находящейся в нем материи, должна содержать как минимум три ФК G , c и $\hbar$, которые являются характерными константами гравитации, СТО и квантовой теории. С помощью этих констант или их комбинаций можно определить основные масштабы измерений. Такими масштабами могут быть, например, планковские масштабы длины, массы и времени: L , m_L , τ_L . В используемой здесь концепции гравитационного вакуума [24] (гл.6) пространство-время заполнено средой, состоящей из виртуальных частиц с планковскими размерами и массой — планкеонов (см. § 2.3) [11].

В классическом подходе такие частицы можно представлять себе как замкнутые микровселенные, и их виртуальность может быть связана с тем, что их масса по отношению к «внешнему» пространству (обычному пространству, где находятся наблюдатели) равна нулю. Однако на расстояниях порядка планковских гравитационное поле, по-видимому, квантовано. Следовательно, хотя микровселенные с планковскими параметрами можно получить как решения классических уравнений ОТО или других релятивистских теорий гравитации [6], такие решения представляют ограниченный интерес. Будем считать, что в квантовом подходе за счет вакуумных флуктуаций метрики (или топологии) они эффективно не совсем замкнуты.

Здесь мы не предполагаем справедливость какой-либо конкретной теории тяготения (например, ОТО), однако считаем, что некоторая релятивистская теория, включающая идею кривизны, выполняется.

Следуя [3, 22], рассмотрим некоторые соображения, приводящие к представлениям о переменности мировых констант.

Нетрудно убедиться, что в современную эпоху по порядку величины выполняется так называемое соотношение Маха

$$2GM/c^2a = 1,$$

где M — масса Вселенной (вычисленная как произведение средней наблюдаемой плотности ρ на объем $\pi^2 a^3$ в предположении, что справедлива закрытая эллиптическая модель); a — масштабный фактор. Подобное соотношение возникает и в любой релятивистской теории гравитации (включая ОТО, см. Якимов В. Е. Тезисы ГР-5. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 232), в которой по порядку величины выполнено соотношение $R = \kappa c^2$, поскольку скалярная кривизна $R \sim a^{-2}$.

Другое важное соотношение

$$M/a^2 = m_n/\lambda_n^2, \quad (1.29)$$

где m_n и λ_n — масса и комптоновская длина волны нуклона, возникает из требования равенства гравитационных плотностей энергии (давлений) вне (т. е. космологической плотности энергии) и внутри частицы:

$$GM^2/a^4 = Gm_n^2/\lambda_n^4.$$

Из (1.29) получается формула Дирака для числа частиц $N_n = M/m_n = (a/\lambda)^2$, которая имеет теперь ясный физический смысл, а именно: это условие гравитационной устойчивости нуклона. Используя принцип неопределенности в виде $mc\lambda \gtrsim \hbar$, определим параметры нуклонов:

$$\lambda_n = (L^2 a)^{1/3} \approx 10^{-13} \text{ см}, \quad m_n = c\hbar/\lambda_n \approx 10^{-24} \text{ г}.$$

В дальнейшем будем пользоваться атомной системой единиц, что соответствует модели Дирака. В этой системе

$$G = G_0 a_0/a; \quad L = L_0 \sqrt{a_0/a}; \quad m_L = m_{L0} \sqrt{a/a_0},$$

где G_0 и a_0 — современные значения G и a ; L_0 и m_{L0} — современные значения планковских параметров. Таким образом, в атомной системе параметры «ячеек» гравитационного вакуума меняются с расширением Метагалактики. «Истинные» постоянные c и $\hbar$ в дальнейших расчетах примем равными 1.

Гравитационный вакуум и рождение вещества. Известные расчеты числа рожденных частиц в космологии [58] приводят к выводу, что лишь весьма малая часть имеющихся частиц могла быть рождена из вакуума. Попытаемся показать, что в рамках гипотезы гравитационного вакуума все вещество могло появиться за счет «высвечивания» из виртуальных планкеонов.

Расчет на основе модели планкеонов будет носить оценочный характер (другой способ см. в § 6.2), поэтому для планкеона примем классическую модель: будем считать, что он описывается изотропной космологической метрикой

$$ds^2 = a_L^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi d\Omega^2],$$

причем для масштабного фактора a_L примем наиболее простую временную зависимость — линейную:

$$a_L = L + \gamma t, \quad (1.30)$$

где $dt = a_L(\eta) d\eta$; γ — постоянный коэффициент, характеризующий возмущение планкеона внешним фоном.

Будем использовать методы квантовой теории для массивного скалярного поля в изотропном мире согласно [58] и считать, что кванты скалярного поля рождаются планкеоном и проявляются во внешнем пространстве даже при использовании для планкеона закрытой модели, поскольку за счет флуктуаций он не совсем замкнут [59].

Плотность числа частиц, рожденных одним планкеоном (в предположении, что при $t = 0$ имел место вакуум — состояние без частиц), определяется выражением

$$n_1(\eta) = (\pi a_L^3)^{-1} \int d\lambda \lambda^2 |\beta_\lambda(\eta)|^2, \quad (1.31)$$

где

$$|\beta_\lambda|^2 = (E_\lambda - 1)/2; \quad (1.32)$$

$$E_\lambda(\eta) = \omega^{-1} [|\dot{u}_\lambda|^2 + \omega^2(\eta) |u_\lambda|^2], \quad (1.33)$$

функция $u_\lambda(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{u}_\lambda + \omega^2(\eta) u_\lambda = 0, \quad \omega^2 = \lambda^2 + m^2 a_L^2(\eta) + 1 \quad (1.34)$$

и начальным условиям при $t = \eta = 0$

$$u_\lambda(0) = 1/\sqrt{\omega(0)}, \quad \dot{u}_\lambda(0) = i\sqrt{\omega(0)}.$$

При

$$\gamma t \ll 1, \quad \gamma \ll 1, \quad \gamma \ll Lm \quad (1.35)$$

[первое условие соответствует малому возбуждению планкеона ($\Delta L \ll L$), второе — медленному расширению ($a_L H_L \ll 1$), третье — адиабатичности ($H_L \ll m$)], решая уравнение (1.34) с учетом (1.30) и подставляя решение в (1.31) — (1.33), приходим к следующей оценке плотности числа частиц, рожденных одним планкеоном за время Δt :

$$\begin{aligned} n_1(t) &= \frac{m H_L^2}{4\pi^2} \int_1^\infty dx \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^5} \sin^2(xmt) \approx \frac{m^3 H_L^2 \Delta t^2}{4\pi^2} \int_1^\infty dx \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} \approx \\ &\approx \frac{m^3 H_L^2 \Delta t^2}{16\pi}; \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$x = \sqrt{1 + \lambda^2/m^2 a_L^2}; \quad H_L = \frac{1}{a_L} \frac{da_L}{dt} = \frac{\gamma}{L}.$$

В подынтегральном выражении использована аппроксимация $\sin^2(xmt) \rightarrow (xmt)^2$, мало влияющая на результат.

В объеме одного планкеона ($\pi^2 L^3$ в соответствии с эллиптической моделью) приращение числа частиц за время Δt

$$\Delta N_1 = \pi^2 L^3 n_1 = (\pi/16) m^3 H_L^2 \Delta t^2, \quad (1.37)$$

а в объеме Метагалактики [по гипотезе плотного заполнения число планкеонов равно $(a/L)^3$; здесь a — радиус Метагалактики], учитывая, что $H_L = \gamma/L$, получаем приращение за время $\Delta t = L$:

$$\Delta N = (\pi/16) m^3 H_L^2 \Delta t^2 a^3 = (\pi/16) m^3 \gamma^2 a^3.$$

Будем полагать, что среднее время жизни виртуального планкеона $\Delta t = L$ (см. гл. 2). Формула (1.36) фактически дает математическое ожидание приращения числа частиц в расчете на один планкеон; в действительности $\Delta N_1 \ll 1$, т. е. лишь весьма малая часть планкеонов успевает за время своей жизни «высветить» частицу. На следующем отрезке времени $\Delta t \ll L$ возникают уже новые виртуальные планкеоны, и в них, естественно, рождение частиц идет вновь из вакуума, так что приращение числа частиц в Метагалактике [формула (1.37)] суммируется. (Эта простая модель иллюстрирует неизвестный статистический механизм появления и высвечивания виртуальных планкеонов.) В результате, учитывая малость Δt по сравнению с временем жизни Метагалактики, можно выписать:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \frac{dN}{dt} = \frac{\pi}{16L} m^3 \gamma^2 a^3 = \frac{\pi}{16} \frac{m^3 \gamma^2}{L_0 \sqrt{a_0}} a^{7/2}$$

(в последнем равенстве учтена зависимость $L(a)$ согласно модели Дирака). Здесь неизвестной остается зависимость коэффициента возбуждения γ от мирового времени или масштабного фактора. Чтобы опреде-

лить ее, постулируем в согласии с ГБЧ (поскольку именно этот закон выполняется в выбранной системе единиц):

$$N = N_0 (a/a_0)^2, \quad (1.38)$$

где N_0 — число частиц в современную эпоху. Следовательно, коэффициент γ определится из соотношения

$$N da/dt = (\pi m^3 a_0^{3/2}/32 L_0) \gamma^2 a^{5/2},$$

если известна зависимость $a(t)$. Выбирая для простоты $a = t$, получаем:

$$\gamma = (32 L_0 N_0 / \pi m^3 a_0^{3/2})^{1/2} a^{-5/4}. \quad (1.39)$$

Рассмотрим начальные условия эволюции модели. Ясно, что в Метагалактике должна содержаться, по крайней мере, одна «ячейка» с планковскими размерами. Следовательно, минимальный радиус $a_{\min}$ определяется из условия $N_{\text{яч}} = (a/L)^3 = 1$, $a = L$, откуда

$$a_{\min} = (L_0^2 a_0)^{1/3} = (L^2 a)^{1/3}, \quad (1.40)$$

что составляет 10^{-13} см. Отметим, что это условие как раз соответствует принципиальной нижней границе классического описания в космологии: масштабный фактор равен планковской длине. $a_{\min}$ совпадает также с комптоновской длиной волны нуклона λ_n . Поскольку в принципе в любой момент времени на массы частиц существует ограничение $m_L(a) > m \geq a^{-1}$, очевидно, что в начальную эпоху рождаться могут только нуклоны.

Вернемся к формуле (1.38). Примем $N = 1$ при $a = a_{\min}$, что отражает факт рождения первого нуклона. Из (1.38) получим

$$N_0 = (a_0/a_{\min})^2 \quad (1.41)$$

и, сравнивая (1.40) и (1.41), придем к выражению

$$N_0 = (a_0/L_0)^{4/3} \sim 10^{81}, \quad a_0 \sim 10^{28} \text{ см},$$

что совпадает с принятыми оценками для числа нуклонов во Вселенной в современную эпоху. Зная N_0 и подставляя $m = m_n$, из (1.39) определим γ :

$$\gamma^2 = \frac{32}{\pi} \frac{(L_0^2 a_0)^{5/6}}{a^{5/2}} = \frac{32}{\pi} \left(\frac{\lambda_n}{a} \right)^{5/2}.$$

Для современной эпохи ($a = a_0$)

$$\gamma^2 = (32/\pi) (\lambda_n/a_0)^{5/2} \sim 10^{-102},$$

т. е. в настоящее время возбуждение планкеона внешним полем ничтожно. Для $a = a_{\min}$ получаем

$$\gamma = \sqrt{32/\pi} \sim 1.$$

Условия (1.35) при $a = a_0$ сводятся к неравенству $\gamma \ll 10^{-20}$, а при $a = a_{\min}$ — к неравенству $\gamma \ll 1$. Можно заключить, что принятое приближение справедливо при $a \gg a_{\min}$, т. е. до самых ранних эпох.

Подчеркнем, что эти оценки имеют смысл, если максимальная масса реальных элементарных частиц порядка m_n . Ввиду сильной зависи-

мости числа рожденных частиц от m ($\sim m^3$) будут преимущественно рождаться частицы с максимально возможной массой. Значения m в каждую эпоху ограничены сверху величиной $m_L(a) \ll a^{-1/2}$, и если спектр масс реальных частиц содержит значения, намного превышающие m_n , то рождение частиц с такими массами m_i начинается только с момента времени, когда $m_i^{-1} = L(a)$, т. е. $a = a_0/(mL_0)^2$. Родившись, такие частицы распадаются на устойчивые, т. е. в основном на нуклоны.

Полученную формулу (1.40) с помощью соотношения Маха можно преобразовать к формуле (1.29). Действительно, из равенств $\lambda^3 = L^2 a = 2Ga$ следует, что

$$m/\lambda^2 = 1/26a = M/a^2 = m_L/aL.$$

Будем полагать, что это соотношение применимо к любым устойчивым частицам, т. е. что выполняется следующий критерий гравитационной устойчивости: на поверхности устойчивой частицы гравитационная плотность энергии (давление) на некотором характерном радиусе взаимодействия l_i равна средней гравитационной плотности энергии (давлению) Метагалактики. Иными словами,

$$\frac{M}{a^2} = \frac{m_n}{\lambda_n^2} = \frac{m_e}{l_e^2} = \frac{m_\nu}{l_\nu^2} = \frac{m_i}{l_i^2}, \text{ или } L^2 a = \lambda_i l_i^2.$$

Дальнейшее использование и другой вывод этой формулы см. в гл. 6.

Вопросы, связанные с возможными вариациями констант, изложены также в работе [60], а некоторые связи между ними, близкие к концепции Картера, можно найти в [61].

Обобщенное уравнение гравитационного поля для вакуума. Обычно принято, что уравнение состояния для гравитационного вакуума $\varepsilon + p = 0$. Выведем уравнение поля для вакуума, считая, что эффективная гравитационная связь $\kappa = \kappa(R)$, где R — скалярная кривизна. Для этой цели, проварьировав обычную плотность лагранжиана $\mathcal{L} = \sqrt{-g} [R/2\kappa(R) + p]$, найдем, что

$$R_i^k \left(1 - \frac{d \ln \kappa}{d \ln R}\right) - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \kappa T_i^k = \kappa [(p + \varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k p]. \quad (1.42)$$

Предполагая, что $\kappa \sim R^\alpha$, где $\alpha = \text{const}$, получаем, что

$$R_i^k (1 - \alpha) - (1/2) \delta_i^k R = \kappa [(p + \varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k p].$$

Тогда с учетом уравнения состояния вакуума $T_i^k = \delta_i^k p$ уравнение (1.42) примет вид:

$$R_i^k (1 - \alpha) - (1/2) \delta_i^k R = \delta_i^k \kappa p = - \delta_i^k \kappa \varepsilon. \quad (1.43)$$

Взяв ковариантную производную от правой и левой частей этого уравнения и учитывая, что $(R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R)_{;k} = 0$, найдем:

$$\alpha R_{i;k} = (\alpha/2) \partial R / \partial x^i = \partial (\kappa \varepsilon) / \partial x^i.$$

Интегрируя, получаем

$$R = 2 \kappa \varepsilon / \alpha. \quad (1.44)$$

Свертывая (1.43), находим, что

$$R = 4\kappa\varepsilon/(1 + \alpha). \quad (1.45)$$

Сравнив (1.44) и (1.45), определим с учетом $\kappa \sim R^\alpha$:

$$d\ln\kappa/d\ln R = \alpha = 1, R/2\kappa = \text{const}; \varepsilon = \text{const}, R = 2\kappa\varepsilon. \quad (1.46)$$

Рассмотрим обычный вариант однородной и изотропной космологической модели, когда метрика имеет вид:

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + a^2 (d\chi^2 + A^2 d\Omega^2), \quad c = 1; \quad (1.47)$$

при этом

$$R = (6/a^2) (\beta_1 + \dot{a}^2 + \ddot{a}a), \quad (1.48)$$

где $\dot{a} = da/d\tau$; $\beta = 1, 0, -1$; $A = \sin \chi, \chi, \text{sh } \chi$ для трех видов геометрий пространства.

Предположим теперь, что выполняется соотношение Маха $2GM/a = 1$. Из него следует $\kappa\varepsilon a^2 = 3$, $\kappa \sim a^{-2}$, что с учетом (1.46) дает

$$R = 6/a^2. \quad (1.49)$$

Сравнивая (1.48) и (1.49) и интегрируя, находим:

$$a = \sqrt{(1 - \beta_1)\tau^2 + a_0^2},$$

где a_0 — минимальное значение масштабного фактора. Отсюда при $\beta = 1$: $a, \varepsilon, R, \kappa$ постоянные — статическая модель (отрицательное давление); при $\beta = -1$: $a = (2\tau^2 + a_0^2)^{1/2}$ — расширение со сверхсветовой скоростью на асимптотике; при $\beta = 0$: $a = (\tau^2 + a_0^2)^{1/2}$ — расширение на асимптотике со скоростью света, что совпадает с вакуумной гипотезой [24].

Таким образом, можно сделать вывод, что единственной вакуумной моделью, удовлетворяющей переменности κ , соотношению Маха и хорошей асимптотике при больших временах, является квазиевклидова модель. Напомним, что в этой модели $c, \hbar, \varepsilon$ постоянны, а $G \sim \kappa \sim a^{-2}$, $M \sim a^3$.

Глава 2

РЕШЕНИЯ С ФИЗИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ В ОТО

2.1. РЕШЕНИЯ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКЕ [7, 62]

В большинстве работ, посвященных самосогласованным задачам в ОТО, рассматривается макроскопическая материя (пыль, идеальная жидкость и т. д.). При изучении возможного влияния гравитации в микромире, в частности, на свойства элементарных частиц и пробле-

мы коллапса возникает необходимость в постановке задач, в которых материя задавалась бы в виде различных полей. Такие задачи полезны и для понимания поведения Вселенной на ранних стадиях ее расширения.

Ограничимся вначале рассмотрением «свободного» скалярного поля. Для его описания в искривленном пространстве будем использовать уравнение Пенроуза — Тагирова — Черникова (ПТЧ) [63]

$$(\square + m^2 + R/6) \varphi = 0, \quad (2.1)$$

где $\square = \nabla^\alpha \nabla_\alpha$ — общековариантный оператор Даламбера; R — скалярная кривизна. Добавление члена $R/6$ к обычно применяемому уравнению

$$(\square + m^2) \varphi = 0 \quad (2.2)$$

обеспечивает инвариантность (2.1) при $m = 0$ относительно конформных преобразований $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$, где $\Omega > 0$ — произвольная гладкая функция координат. Как показано в [63, 64], именно в случае справедливости уравнения (2.1) поле φ обладает следующими необходимыми свойствами: для безмассового поля след тензора энергии-импульса равен нулю, как и для других безмассовых полей — электромагнитного и нейтринного; решение для поля φ имеет правильный квазиклассический предел; перестановочная функция безмассового квантованного поля φ сосредоточена на световом конусе. При переходе к плоскому пространству из (2.1), как и из (2.2), получаем обычное уравнение Фока — Клейна — Гордона. Рассмотрим систему с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \nabla^\mu \varphi^* \nabla_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - \frac{R}{6} \varphi^* \varphi + \frac{R - 2\Lambda}{2\kappa}; \quad c = \hbar = 1,$$

где φ^* — комплексно-сопряженное поле. Будем пользоваться метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ с сигнатурой $(+ - - -)$ и выберем знак тензора кривизны так, что для любого вектора A_μ

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\sigma - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\sigma = R^\alpha_{\sigma\mu\nu} A_\alpha,$$

где индексы принимают значения 0, 1, 2, 3.

Варьируя интеграл действия

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4 x, \quad d^4 x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

по φ , φ^* и $g^{\mu\nu}$, получаем уравнения (2.1) для скалярного поля и уравнения Эйнштейна с Λ -членом

$$R^\nu_\mu - (1/2) \delta^\nu_\mu R + \delta^\nu_\mu \Lambda = -\kappa T^\nu_\mu, \quad (2.3)$$

причем тензор энергии-импульса материи (скалярного поля)

$$T^\nu_\mu = \nabla_\mu \varphi^* \nabla^\nu \varphi + \nabla^\nu \varphi^* \nabla_\mu \varphi - \delta^\nu_\mu [\nabla^\alpha \varphi^* \nabla_\alpha \varphi - (m^2 + R/6) \varphi^* \varphi] - \frac{1}{3} (R^\nu_\mu + \nabla_\mu \nabla^\nu - \delta^\nu_\mu \square) \varphi^* \varphi$$

обладает свойствами

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}; \quad T = T_{\mu}^{\mu} = 2m^2 \varphi^* \varphi; \quad \nabla_{\alpha} T_{\mu}^{\alpha} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь $R_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\alpha} R_{\alpha\beta\mu}^{\beta}$ — тензор Риччи.

Попытаемся теперь решить самосогласованную задачу (2.1), (2.3) для $m = 0$ в предположении центральной симметрии и статичности. Будем считать, что интересующие нас явления происходят в масштабах, далеких от космологических, и будем поэтому рассматривать уравнения (2.3) без Λ -члена.

Итак, метрику запишем в общем виде для центральной симметрии:

$$ds^2 = \exp [\nu(r)] dt^2 - \exp [\lambda(r)] dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

и положим $\varphi = \varphi(r)$. Тогда три независимых уравнения из системы (2.1), (2.3) представляют собой следующее:

$$A \left(\frac{1 - \exp \lambda}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) = -\frac{\kappa}{3} \left[\varphi^{*'} \varphi' + \frac{\nu'}{2} (\varphi^* \varphi)' \right]; \quad (2.5)$$

$$A \left(\frac{1 - \exp \lambda}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) = \kappa \left[\varphi^{*'} \varphi' + \frac{1}{6} \left(\frac{4}{r} + \nu' \right) (\varphi^* \varphi)' \right]; \quad (2.6)$$

$$\varphi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2} \right) \varphi' = 0, \quad (2.7)$$

где $A = 1 - (\kappa/3)\varphi^* \varphi$, штрих означает $\partial/\partial r$. Отметим, что свертка уравнений (2.3) в силу (2.4) дает:

$$R = 0. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) один раз легко интегрируется:

$$\varphi' r^2 = C_1 \exp [(\lambda - \nu)/2], \quad C_1 = \text{const}. \quad (2.9)$$

В частности, если $C_1 = 0$, то $\varphi = \text{const}$, причем при $|\varphi|^2 = 3/\kappa$ на метрику согласно (2.5) — (2.7) наложено единственное условие $R = 0$. При $|\varphi|^2 \neq 3/\kappa$ решением является метрика Шварцшильда, для которой

$$\nu' + \lambda' = 0. \quad (2.10)$$

Попытаемся найти решение системы, удовлетворяющее (2.10) при $C_1 \neq 0$. В этом случае уравнение (2.8) принимает вид:

$$\lambda'' - \lambda'^2 + 4\lambda'/r + (2/r^2) (\exp \lambda - 1) = 0$$

и подстановкой $z = \exp (-\lambda)$ интегрируется:

$$\exp (-\lambda) = 1 - 2a/r + b/r^2, \quad a, b = \text{const}. \quad (2.11)$$

Находя далее ν и φ из (2.10) и (2.9) и подставляя их вместе с (2.11) в уравнения (2.5), (2.6), убеждаемся, что они выполняются при $b = a^2$, т. е. получаем решение системы (2.5) — (2.7):

$$\exp \nu = \alpha^2 \exp (-\lambda) = \alpha^2 (1 - a/r)^2; \quad \varphi = -C_1 / \alpha (r - a), \quad \alpha = \text{const}.$$

Граничное условие галилеевости на бесконечности

$$\exp \nu \rightarrow 1; \quad \exp \lambda \rightarrow 1, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

заставляет положить $\alpha = 1$. Окончательно имеем

$$ds^2 = (1 - a/r)^2 dt^2 - (1 - a/r)^{-2} dr^2 - r^2 d\Omega^2; \quad (2.13)$$

$$\varphi = -C_1/(r - a), \quad |C_1|^2 = 3a^2/\kappa.$$

Часто при центральной симметрии, кроме условия (2.12), требуется еще условие элементарной евклидовости в центре (см., например, [65]):

$$\exp [\lambda (0)] = \exp [\nu (0)] = 1. \quad (2.14)$$

Однако, как легко убедиться, условие (2.14) противоречит системе (2.5) — (2.7). По-видимому, требование (2.14) является обязательным лишь для обычной макроматерии, а не для полей. Попытка удовлетворить этому условию в присутствии как макроматерии (пыль), так и полей [скалярного, описываемого уравнением (2.2), и электромагнитного] была предпринята в [65]. В результате получилась бесконечная плотность пыли в центре, что физически трудно объяснимо и к тому же плохо «увязывается» с (2.14) — условием отсутствия сингулярности.

Вернемся к системе (2.5) — (2.7) и попытаемся найти решение этой задачи без ограничения (2.10). В [66], где развит один из вариантов скалярно-тензорной теории гравитации, найден интеграл уравнений типа (2.5) — (2.7). В рассматриваемом случае он имеет вид:

$$\exp \bar{\lambda} = 1 - Cy - C_2 y^2; \quad \exp \bar{\nu} = (1/x^2) (y^{-2} - Cy^{-1} - C_2);$$

$$x^2 = x_0^2 \frac{|1 - Cy - C_2 y^2|}{y^2} \left| \frac{2C_2 y + C - 2D}{2C_2 y + C + 2D} \right|^{\frac{C}{2D}},$$

где y — независимый параметр;

$$\begin{aligned} x &= r \sqrt{A}; \quad \exp \bar{\nu} = \exp \nu A; \quad \exp \bar{\lambda} = \{ \\ &= \exp \lambda [1 + (\kappa/6A) x (d/dx) (\varphi^* \varphi)]^2; \end{aligned} \quad (2.15)$$

x_0, C — постоянные интегрирования; $C_2 = \kappa |C_1|^2 > 0$; $2D = \sqrt{C^2 + 4C_2}$. Накладывая граничное условие (2.12) и пользуясь (2.15), можно проинтегрировать уравнение (2.9) и получить решение системы (2.5) — (2.7) в виде, удобном для дальнейшего исследования:

$$\left. \begin{aligned} r(\xi) &= [D/(1 - \xi)] \xi^{(1/2)(1-\gamma-\beta)} (1 + \xi^\beta); \\ \exp [\nu(\xi)] &= (1/4) \xi^{\gamma-\beta} (1 + \xi^\beta)^2; \\ \exp [\lambda(\xi)] &= 4\xi [1 - \gamma + (1 + \gamma)\xi - \beta(1 - \xi) \times \\ &\times (1 - \xi^\beta)/(1 + \xi^\beta)]^{-2}; \\ \varphi(\xi) &= \sqrt{3/\kappa} [(1 - \xi^\beta)/(1 + \xi^\beta)] C_1/|C_1|, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где $\xi = |y_2/y_1| (y_1 - y)/(y - y_2)$; $\gamma = C/2D$; $\beta = \sqrt{(1 - D^2)/3}$; $y_1 > 0$ и $y_2 < 0$ — корни трехчлена $1 - Cy - C_2 y^2$. Независимый параметр ξ и постоянные интегрирования γ и D заключены соответственно в пределах

$$0 < \xi < 1; \quad -1 < \gamma < 1; \quad 0 < D < \infty,$$

причем $r(1) = \infty$.

При $\gamma = \pm 1/2$ решение принимает простой вид (2.13), где $a = \gamma D = \pm D/2$. При больших r (когда $\xi \rightarrow 1$) решение системы (2.16) имеет следующий вид:

$$\exp v = \exp(-\lambda) = 1 - 2\gamma D/r; \quad \varphi = \sqrt{3/\kappa} \beta D/r,$$

т. е. ведет себя как шварцшильдовское решение с массой

$$M = 8 \pi \gamma D / \kappa. \quad (2.17)$$

Поэтому, видимо, следует приписывать ему физический смысл лишь при $\gamma > 0$. Далее, можно вычислить плотность энергии скалярного поля

$$T_0^0 = \frac{\beta \exp(-\lambda)}{2\kappa} \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^{-2} \frac{\beta - \gamma + (\beta + \gamma) \xi^{2\beta}}{\xi^2 (1 + \xi^\beta)^2} \quad (2.18)$$

и, пользуясь равенством

$$\exp(\lambda/2) dr/d\xi = [D(1 + \xi^\beta)/(1 - \xi)^2] \xi^{-\frac{\beta + \gamma}{2}},$$

найти собственную энергию скалярного поля вне сферы радиуса $\xi = \xi_0$:

$$\left. \begin{aligned} E &= \int T_0^0 \sqrt{-g} d^3 x; \\ E(\xi_0) &= 2\pi \gamma D / \kappa + (\pi D / \kappa) [(\beta - \gamma) \xi_0^{-\beta} - (\beta + \gamma) \xi_0^\beta]. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

При $\gamma = 1/2$ имеем

$$E(r_0) = 4\pi a^2 / \kappa r_0.$$

Рассмотрим теперь отдельно случаи $\gamma < 1/2$, $\gamma = 1/2$, $\gamma > 1/2$.

а. $\gamma < 1/2$. Функция $r(\xi)$ монотонна и $r(0) = 0$. Метрика регулярна во всем 3-пространстве, кроме точки $r = 0$, а поле φ регулярно всюду. При этом

$$\exp[v(0)] = \infty; \quad \exp[\lambda(0)] = 0; \quad |\varphi(0)| = \sqrt{3/\kappa}.$$

Плотность T_0^0 всюду положительна и приводит к бесконечному значению интеграла (2.19) при $\xi_0 \rightarrow 0$. Однако полная наблюдаемая энергия материи и гравитационного поля (2.17) конечна, что можно интерпретировать как компенсацию энергии скалярного поля бесконечной отрицательной энергией гравитации.

Как известно, при отсутствии сингулярностей для полной энергии справедлива формула Толмена (см. [67])

$$E = \int (2T_0^0 - T) \sqrt{-g} d^3 x. \quad (2.20)$$

Если ее применить здесь формально, то, проинтегрировав по области $r > r_0$, получим в силу $T = 0$ при любом r_0 : $E = 2E_0(r_0)$, что совпадает с (2.17) при $\xi_0^\beta = (\beta - \gamma)/(\beta + \gamma)$. Это можно интерпретировать как наличие эффективного обрезания в формуле для полной энергии аналогично результату Арновитта, Дезера и Мизнера [68] для электромагнитного поля. Для кулоновского поля с учетом грави-

тации они получили конечное значение полной энергии точечного заряда и сравнением с соответствующей формулой для энергии в плоском пространстве — наличие в этой формуле обрезания при радиусе $a \sim e\sqrt{\kappa} \sim 10^{-33}$ см. В рассматриваемом случае появляется подобное обрезание в искривленном пространстве при использовании формулы Толмена.

Отметим, что согласно (2.20) подобный результат будет иметь место для любой безмассовой материи (когда $T = 0$), если считать полную гравитационную энергию отрицательной.

б. $\gamma = 1/2$. Решение принимает вид (2.13). Оно сингулярно в центре ($\exp [\lambda(0)] = \exp [-v(0)] = 0$, $|\varphi(0)| = \sqrt{3/\kappa}$) и при $r = a$ ($\exp [v(a)] = \exp [-\lambda(a)] = 0$, $\varphi(a) = \infty$). Анализ энергии, подобный анализу для $\gamma < 1/2$, приводит к эффективному обрезанию при $r = a = \sqrt{\kappa/3} |C_1| \sim |C_1| \cdot 10^{-33}$ см, т. е. как раз на сингулярной сфере.

в. $\gamma > 1/2$. При этом удобно в качестве радиальной координаты выбрать параметр ξ , а не r . Тогда

$$\begin{aligned} ds^2 = & \exp [v(\xi)] dt^2 - \exp \lambda (dr/d\xi)^2 d\xi^2 - \\ & - r^2(\xi) d\Omega^2 = (1/4) \xi^{\gamma-\beta} (1 + \xi^\beta)^2 dt^2 - \\ & - [D^2 (1 + \xi^\beta)^2 / (1 - \xi)^4] \xi^{-\gamma-\beta} d\xi^2 - \\ & - [D^2 (1 + \xi^\beta)^2 / (1 - \xi)^2] \xi^{1-\gamma-\beta} d\Omega^2. \end{aligned}$$

Эта метрика определяет довольно своеобразную геометрию. Инвариантная длина окружности $t = \text{const}$, $\xi = \text{const}$, $\theta = \pi/2$, равная $2\pi r(\xi)$, при приближении из бесконечности ($\xi = 1$) к центру вначале убывает; при $\xi = \xi^* > 0$ она принимает некоторое минимальное отличное от нуля значение $r_{\text{мин}} = r(\xi^*)$ и снова увеличивается до бесконечности при $\xi \rightarrow 0$. Здесь ξ^* определяется из трансцендентного уравнения

$$1 - \gamma - \beta + (1 - \gamma + \beta) \xi^{*\beta} + (1 + \gamma + \beta) \xi^* + (1 + \gamma - \beta) \xi^{*\beta+1} = 0,$$

которое имеет в интервале $0 < \xi < 1$ единственное решение. В то же время инвариантное расстояние от произвольной точки до сингулярной сферы $\xi = 0$ (по радиусу) и инвариантный 3-объем шара $\xi \leq \xi_0 < 1$ конечны. Эти свойства отличны от свойств метрик Шварцшильда и Райснера — Нордстрема (см. [69]).

Из выражения (2.18) видно, что плотность энергии скалярного поля T_0^0 отрицательна при $\xi^{2\beta} < (\gamma - \beta)/(\gamma + \beta)$. Это приводит к бесконечному отрицательному значению интеграла (2.19) при $\xi_0 \rightarrow 0$. Масса (2.17) конечна и положительна; следовательно, бесконечна и положительна гравитационная энергия, и возникновение «дырки» в решении $[r \geq r^* = r(\xi^*)]$ можно интерпретировать как результат расталкивающего действия гравитационных сил. Влияние на решение скалярного и гравитационного полей противоположно тому, которое характерно для случаев «а» и «б».

Таким образом, в используемом формализме вклад энергии скалярного поля в полную энергию системы может быть как положительным,

так и отрицательным. Данный результат отличается от выводов работы [65], где получено, что вклад энергии скалярного поля в полную энергию всегда отрицателен. Заметим, что этот вывод был сделан на основании требования элементарной евклидовости (о чем говорилось выше), а не в результате непосредственного вычисления энергии. Кроме того, в [65] для скалярного поля используется уравнение (2.2), которое получено формальной заменой обычных производных ковариантами в уравнении, справедливом для плоского пространства. Некорректность такого подхода подробно обсуждается в [63].

2.2. РЕШЕНИЯ СО СТАТИЧЕСКИМИ СКАЛЯРНЫМИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ [70]

Общие замечания. В связи с возможным обнаружением *черных дыр* в двойных системах широко обсуждались их свойства, в частности вопрос о внешних полях этих гипотетических астрофизических объектов. Поэтому особый интерес приобретает самосогласованное рассмотрение систем гравитационного и материальных полей в тех сравнительно простых случаях, когда можно найти точные решения. Задачи теории гравитации, в которых материя задана не в обычном макроскопическом виде с помощью уравнения состояния (пыль, идеальная жидкость и т. д.), возникают и при изучении возможного влияния гравитации на структуру и свойства элементарных частиц.

Как обобщение § 2.1 обсудим свойства статических сферически-симметричных точных решений для самосогласованной системы эйнштейновского гравитационного, безмассового скалярного и электромагнитного полей. В качестве уравнения скалярного поля выберем конформноковариантное уравнение (2.1) с $m = 0$.

Решения интересующих нас задач получены в следующих работах: [71] — для скалярного поля (2.2); [7, 62] — для скалярного поля (2.1); [72] и более полно [73] — для скалярного (2.2) и электромагнитного полей; [70] — для скалярного (2.1) и электромагнитного полей. Кроме того, в [74] указано конформное отображение, позволяющее сводить задачи с полем (2.1) к аналогичным задачам с полем (2.2).

Ниже будет изложено решение всех четырех задач [для скалярных полей (2.1) или (2.2) с электромагнитным полем или без него] единым способом в наиболее компактном виде.

Основные уравнения. Рассмотрим систему полей с лагранжианом

$$L = A(\varphi) R/2\kappa + g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} - (1/4) F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.21)$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля. Для удобства считаем поле φ вещественным. Использование комплексного поля по существу ничего не изменит в излагаемых результатах.

Если $A(\varphi) = 1 - (1/3)\kappa\varphi^2$ (назовем этот выбор системой I), то, варьируя (2.21) по φ , $F^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$, получаем соответственно уравнение (2.1) для скалярного поля, уравнения Максвелла без источника

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\mu} = 0 \quad (2.22)$$

и уравнения Эйнштейна

$$G_{\mu}^{\nu} \equiv R_{\mu}^{\nu} - (1/2) \delta_{\mu}^{\nu} R = -\kappa (T_{\mu}^{\nu} + T_{\mu}^{\nu}) \quad (2.23)$$

с тензорами энергии-импульса

$$T_{\mu}^{\nu} = 2\varphi'^{\nu} \varphi_{,\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} \varphi^{\alpha} \varphi_{,\alpha} - (1/3) (G_{\mu}^{\nu} + \nabla^{\nu} \nabla_{\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} \square) \varphi^2; \quad (2.24)$$

$$T_{\mu}^{\nu} = -F^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} + (1/4) \delta_{\mu}^{\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (2.25)$$

Оба эти тензора обладают свойствами:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}; \quad \nabla_{\alpha} T_{\mu}^{\alpha} = 0; \quad T_{\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (2.26)$$

Последнее свойство не имеет места для безмассового поля с уравнением (2.2).

Если $A(\varphi) \equiv 1$ (система II), то из лагранжиана (2.21) следуют уравнение (2.2) для поля φ , уравнение (2.22) для поля $F^{\mu\nu}$ и уравнение (2.23) для поля $g_{\mu\nu}$, в которых, однако, тензор T_{μ}^{ν} надо заменить тензором

$$\bar{T}_{\mu}^{\nu} = 2\varphi'^{\nu} \varphi_{,\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} \varphi^{\alpha} \varphi_{,\alpha}. \quad (2.27)$$

Примем далее, что на пространственной бесконечности метрика становится плоской, значения $F^{\mu\nu}$ стремятся к нулю, а φ — к некоторому постоянному значению φ_0 . Тогда преобразования [74]

$$g_{\mu\nu} = [\text{ch}^2(\sqrt{\kappa/3} \psi) / \text{ch}^2(\sqrt{\kappa/3} \psi_0)] \tilde{g}_{\mu\nu}; \quad (2.28)$$

$$\sqrt{\kappa/3} \varphi = \text{th}(\sqrt{\kappa/3} \psi) \quad (2.29)$$

переводят систему I в систему II в пространстве с метрикой $\tilde{g}_{\mu\nu}$ со скалярным полем ψ , причем снова выполнены оговоренные условия на бесконечности с граничным значением для ψ , равным

$$\psi_0 = \sqrt{3/\kappa} \text{Arth}(\sqrt{\kappa/3} \varphi_0). \quad (2.30)$$

Впрочем, ψ_0 не влияет на метрику $\tilde{g}_{\mu\nu}$, так как в системе II в тензор энергии-импульса скалярного поля [см (2.27)] входят только производные $\psi_{,\mu}$.

При $F^{\mu\nu} \equiv 0$ будем называть системы I и II соответственно системами I_0 и II_0 . Отметим, что преобразования (2.28), (2.29) эффективны не только для перехода $I_0 \rightarrow II_0$, но и для перехода $I \rightarrow II$ в силу конформной инвариантности тензора $F^{\mu\nu}$, т. е. его неизменности при отображении $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}$ (очевидно, в пространстве с метрикой $\tilde{g}_{\mu\nu}$ вместо $F^{\mu\nu}$ используется $\tilde{F}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$, причем $\tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}_{\nu\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}$).

Сферически-симметричные решения. Рассмотрим интересующие нас системы в предположении сферической симметрии и статичности:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \exp[\gamma(z)] dt^2 - \exp[\alpha(z)] dz^2 - \exp[\beta(z)] d\Omega^2; \quad (2.31)$$

$$x^0 = t; \quad x^1 = z; \quad d\Omega^2 = (dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2; \quad (2.32)$$

$$\varphi = \varphi(z); \quad F^{10} = -F^{01} = F^{10}(z); \quad \text{остальные } F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.33)$$

Метрика (2.31) допускает произвольный выбор радиальной координаты z ; каждому конкретному значению z соответствует некоторое соотношение между функциями α , β и γ .

В предположениях (2.31) — (2.33) граничные условия, сформулированные выше, имеют вид:

$$\exp \gamma \rightarrow 1; \quad \exp \beta \rightarrow \infty; \quad (1/4) (d\beta/dz)^2 \exp (\beta - \alpha) \rightarrow 1; \quad (2.34)$$

$$F^{10} \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0 \quad (2.35)$$

при стремлении координаты z к некоторому значению z_∞ , которое пока не фиксировано.

Рассмотрим сначала систему II. Удобно выбрать координату так, что

$$\alpha(z) = 2\beta(z) + \gamma(z). \quad (2.36)$$

Тогда уравнения (2.2) и (2.22) легко интегрируются:

$$\varphi = Cz + \varphi_0; \quad F^{10} = q \exp [-\beta - (\gamma + \alpha)/2], \quad (2.37)$$

где принято, что $z = 0$ соответствует пространственной бесконечности и $\varphi(0) = \varphi_0$. Постоянная интегрирования q имеет смысл электрического заряда, и по аналогии можно назвать C скалярным зарядом.

Найдем неизвестные функции β и γ из уравнений (2.23). В метрике (2.31) среди них два независимых, которые, учитывая (2.27), (2.36) и (2.37), можно записать в виде

$$\begin{cases} \exp \alpha (G_1^1 + G_2^2) = (1/2) (\beta'' + \gamma'') - \exp (\beta + \gamma) = 0; \\ \exp \alpha G_1^1 = \exp (\beta + \gamma) + (1/4) [(\beta' + \gamma')^2 - \gamma'^2] = \\ = \kappa C^2 - (\kappa q^2/2) \exp \gamma, \end{cases} \quad (2.38)$$

где штрих означает d/dz . Интегрируя эти уравнения, находим окончательно:

$$\left. \begin{aligned} ds_{II}^2 &= \frac{2}{\kappa q^2} \frac{dt^2}{s^2(h, z+z_1)} - \frac{\kappa q^2}{2} \frac{s^2(h, z+z_1)}{s^2(k, z)} \left[\frac{dz^2}{s^2(k, z)} + d\Omega^2 \right]; \\ h &\geq -|q| \sqrt{\kappa/2}; \quad k^2 \operatorname{sgn} k = h^2 \operatorname{sgn} h + \kappa C^2; \\ s^2(h, z_1) &= 2/\kappa q^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

где h — постоянная интегрирования;

$$s(a, x) = \begin{cases} a^{-1} \operatorname{sh}(ax) & \text{при } a > 0; \\ x & \text{при } a = 0; \\ a^{-1} \sin(ax) & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Если нет электромагнитного поля ($q = 0$, система II₀), то из уравнений (2.38) следует:

$$\left. \begin{aligned} ds_{II_0}^2 &= \exp(-2hz) dt^2 - \frac{k^2 \exp(2hz)}{\operatorname{sh}^2(kz)} \left(\frac{k^2 dz^2}{\operatorname{sh}^2(kz)} + d\Omega^2 \right); \\ -\infty &< h < \infty; \quad k = \sqrt{h^2 + \kappa C^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Обе эти метрики удовлетворяют граничным условиям (2.34) при $z \rightarrow 0$.

Чтобы перейти от полученных решений для систем II и II₀ к соответствующим решениям для систем I и I₀, достаточно в формулах (2.37), (2.39), (2.41) сделать замену $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi_0 \rightarrow \psi_0$ и совершить преобразование (2.28) — (2.29), рассматривая метрические коэффициенты в (2.39) и (2.41) как $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Получим для системы I:

$$\left. \begin{aligned} ds_I^2 &= \frac{\text{ch}^2 [\sqrt{\kappa/3} (Cz + \psi_0)]}{\text{ch}^2 (\sqrt{\kappa/3} \psi_0)} ds_{II}^2; \\ \varphi &= \sqrt{3/\kappa} \text{th} [\sqrt{\kappa/3} (Cz + \varphi_0)]; \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

величина F^{10} по-прежнему определяется согласно (2.37).

Удобно ввести новую переменную

$$\tilde{z} = \sqrt{\kappa/3} Cz \quad (2.43)$$

и новые параметры

$$\left\{ \begin{aligned} z_0 &= \sqrt{\kappa/3} \psi_0 = \text{Arth} (\sqrt{\kappa/3} \varphi_0); & H &= \sqrt{3/\kappa} h / |C|; \\ \tilde{z}_1 &= \sqrt{\kappa/3} Cz_1; & K &= \sqrt{3/\kappa} k / |C|, \end{aligned} \right. \quad (2.44)$$

так что для системы I имеем окончательно:

$$ds_I^2 = \frac{\text{ch}^2 (z + z_0)}{\text{ch}^2 z_0} \left\{ \frac{2C^2}{3q^2} \frac{dt^2}{s^2 (H, z + z_1)} - \frac{\kappa q^2}{2} \frac{s^2 (H, z + z_1)}{s^2 (K, z)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{dz^2}{s^2 (K, z)} + d\Omega^2 \right] \right\}; \quad (2.45)$$

$$H \geq -\sqrt{3q^2/2C^2}; \quad K^2 \text{sgn } K = H^2 \text{sgn } H + 3; \quad s^2 (H, z_1) = 2C^2/3q^2.$$

Здесь и далее тильда над z и z_1 опущена.

Аналогично для системы I₀

$$ds_{I_0}^2 = \frac{\text{ch}^2 (z + z_0)}{\text{ch}^2 z_0} \left\{ \exp (-2Hz) dt^2 - \frac{\kappa C^2}{3} \frac{K^2 \exp (2Hz)}{\text{sh}^2 Kz} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{K^2 dz^2}{\text{sh}^2 Kz} + d\Omega^2 \right] \right\}; \quad (2.46)$$

$$-\infty < H < \infty; \quad K = \sqrt{H^2 + 3}.$$

Для обеих этих метрик

$$\varphi = \sqrt{3/\kappa} \text{th} (z + z_0), \quad (2.47)$$

а F^{10} , как и раньше, находится из (2.37). Отметим, что в отличие от (2.39) метрики (2.45) и (2.46) не удовлетворяют условию (2.36).

Свойства сферически-симметричных решений. Не теряя общности, будем считать областью определения координаты z во всех четырех решениях конечный или бесконечный интервал

$$0 < z < z_{\text{макс}}, \quad (2.48)$$

где $z_{\text{макс}}$ зависит от постоянных интегрирования. Напомним, что $z = 0$ соответствует пространственной бесконечности.

Остальные свойства этих решений при приближении из бесконеч-

Таблица 3. Свойства сферически-симметричных решений
при приближении к источнику *

Система	Константы	$\exp \chi$	$\exp \beta$	Полные полевые энергии	
				E_s	E_e
II_0	$h < 0$	∞	0	∞	—
	$h = 0$	1	0	∞	—
	$h > 0$	0	0	∞	—
II	$h < 0$ или (и) $z_1 < 0$	∞	0	Конечна, > 0	∞
	$h \geq 0, z_1 > 0$	0	0	∞	Конечна, > 0
I_0	$H < 1$	∞	0	∞	—
	$H > 1$	0	∞	$-\infty$	—
I	$H < 0$ или (и) $z_1 < 0$	∞	0	∞	Конечна, > 0
	$H > 1, z_1 > 0$	0	∞	$-\infty$	Конечна, > 0
	$0 < H < 1,$ $z_1 > 0$	∞	0	∞	∞
I и I_0	$H = 1, \varphi_0 > 0$	Конечна	∞	} Все энергии конечны и положительны	
	$H = 1, \varphi_0 = 0$	0	Конечна		
	$H < 1, \varphi_0 < 0$	0	0		

*В графах $\exp \chi$ и $\exp \beta$ указаны предельные значения этих функций, когда радиальная координата стремится к своему предельному (в статической системе отсчета) значению. При $H=1$, $\varphi_0=0$ [системы I и I_0 , метрика (2.54)] вычислены энергии полей вне горизонта, т.е. в области $r > r_0$.

ности к центру представлены в табл. 3. Она показывает, что решения для систем II и II_0 обладают в центре так называемой *голой сингулярностью*, т.е. сингулярностью, не отделенной от внешнего пространства горизонтом. То же самое можно сказать о системах I и I_0 при $H < 1$. При $H > 1, z_1 > 0$ пространство-время для систем I и I_0 можно назвать, следуя работе Йордана (1972 г.), *пространственным карманом*: с ростом z площадь поверхности сферы радиусом $z = \text{const}$, равная $4\pi \times \exp[-\beta(z)]$, сначала уменьшается, при некотором $z = z^*$ принимает минимальное значение и снова неограниченно растет при $z \rightarrow \infty$. Однако инвариантный путь от $z = z^*$ до $z = \infty$ [определенный интегралом $\int \exp(\alpha/2) dz$] и хронометрически-инвариантный 3-объем области $z^* < z < \infty$ [равный $4\pi \int \exp(\beta + \alpha/2) dz$] конечны.

При $H = 1, z_1 > 0$ сфера радиусом $z = \infty$ регулярна, и, чтобы продолжить метрику за эту сферу, надо ввести новую радиальную координату, например

$$y = \text{cth } z. \quad (2.49)$$

Тогда получим

$$ds^2 = (y + y_0)^2 \left\{ \frac{dt^2}{(y + y_1)^2} - \frac{\kappa C^2}{3} \frac{(y + y_1)^2}{y^4} (dy^2 + y^2 d\Omega^2) \right\}, \quad (2.50)$$

где

$$y_0 = \sqrt{\kappa/3\varphi_0}; \quad y_1 = \sqrt{1 + 3q^2/2C^2}, \quad (2.51)$$

так что при $q = 0$ имеем просто $y_1 = 1$. Скалярное поле определяется формулой

$$\varphi = (y \varphi_0 + \sqrt{3/\kappa}) / (y + \varphi_0 \sqrt{\kappa/3}). \quad (2.52)$$

Пространственной бесконечности здесь соответствует $y = \infty$. Если $\varphi_0 < 0$, то решение определено при $-y_0 < y < \infty$ и имеет «голую сингулярность» в центре ($y = -y_0$, $\exp \beta = \exp \gamma = 0$). Если $\varphi_0 > 0$, то координата y принимает значение от бесконечности до нуля, и при $y \rightarrow 0$ метрика, как и при $y \rightarrow \infty$, становится плоской. Таким образом, существует вторая пространственная бесконечность, связанная с исходным пространством «горловиной» конечных размеров. Центральной точки в таком пространстве нет, как и в решениях (2.45), (2.46) при $H > 1$. Подобные метрики можно пытаться применять для описания топологий типа ручек Уилера, однако в отличие от метрик Шварцшильда и Райснера — Нордстрема метрика (2.50) несингулярна.

При $\varphi_0 = 0$ удобно перейти к координатам кривизн

$$r = (y + y_1) \sqrt{\kappa C^2/3}, \quad (2.53)$$

и решения (2.50), (2.52) принимают вид:

$$ds^2 = (1 - r_0/r)^2 dt^2 - (1 - r_0/r)^{-2} dr^2 - r^2 d\Omega^2; \quad (2.54)$$

$$r_0 = \sqrt{\kappa (C^2/3 + q^2/2)}; \quad \varphi = C/(r - r_0); \quad (2.55)$$

$$F^{10} = q/r^2,$$

т. е. обобщают (2.13) на случай наличия электрического заряда.

Масса и полевая энергия. Важнейшая физическая характеристика рассматриваемых метрик — активная гравитационная масса — получается из сравнения их асимптотики с решением Шварцшильда: для любой метрики (2.31), удовлетворяющей граничным условиям (2.34),

$$M = (8\pi/\kappa) \lim_{z \rightarrow z_\infty} \exp(\beta/2) \gamma'/\beta'. \quad (2.56)$$

Для метрик (2.39), (2.41), (2.45), (2.46), (2.50), (2.54) эта формула дает соответственно

$$M_{II} = \frac{8\pi}{\kappa} \varepsilon \sqrt{\kappa q^2/2 + h^2 \operatorname{sgn} h}, \quad \varepsilon = \begin{cases} \operatorname{sgn} z_1, & h \geq 0; \\ \operatorname{sgn} \operatorname{tg} z_1, & h < 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

$$M_{II_0} = 8\pi h/\kappa; \quad (2.58)$$

$$M_I = \frac{-8\pi}{3} |C| \varphi_0 + \frac{8\pi}{\sqrt{\kappa}} \varepsilon \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{C^2}{3} H^2 \operatorname{sgn} H}; \quad \varepsilon = \begin{cases} \operatorname{sgn} z_1, & H \geq 0; \\ \operatorname{sgn} \operatorname{tg} z_1, & H < 0; \end{cases} \quad (2.59)$$

$$M_{I_0} = - (8\pi/3) |C| \varphi_0 + 8\pi H |C| / \sqrt{3\kappa}. \quad (2.60)$$

Формулы (2.59) и (2.60) применимы к метрикам (2.50) и (2.54), если положить $H = 1$, $z_1 > 0$. В частности, для метрики (2.54)

$$M = (8\pi/\kappa) r_0 = (8\pi/\sqrt{\kappa}) \sqrt{C^2/3 + q^2/2}. \quad (2.61)$$

Условие неотрицательности M приводит к ограничениям: для систем II и II₀ соответственно $\varepsilon = 1$ и $h \geq 0$; для систем I и I₀ в важном частном случае $\varphi_0 = 0$ соответственно $\varepsilon = 1$ и $H \geq 0$.

Полная энергия материальных полей вне фиксированной сферы радиусом $z = z^*$ легко определяется через компоненты T_0^0 соответствующих тензоров энергии-импульса:

$$E(z^*) = \int T_0^0 \sqrt{-g} d^3x = 4\pi \int_0^{z^*} T_0^0 \exp \frac{(\alpha + 2\beta + \gamma)}{2} dz. \quad (2.62)$$

Для систем II и II₀ энергия скалярного поля равна

$$E_s(z^*) = 4\pi C^2 z^*, \quad (2.63)$$

а энергия электромагнитного поля в системе II есть

$$E_e(z^*) = (1/2) M - (4\pi/\kappa) (s'/s) (h, z^* + z_1). \quad (2.64)$$

Аналогичные выражения для систем I и I₀ несколько более громоздки. Запишем суммарную энергию полей в предположении $\varphi_0 = 0$:

$$E_s(z^*) + E_e(z^*) = M/2 + 2\pi |C| / \sqrt{3\kappa} [\operatorname{sh} 2z^* - 2 \operatorname{ch}^2(z^*) \times \\ \times (s'/s) (H, z^* + z_1)]. \quad (2.65)$$

В табл. 3 указана сходимость или расходимость полевых энергий при $z \rightarrow z_{\max}$. Отметим, что при $H = 1$ энергия всех полей конечна.

В остальных случаях суммарная энергия материальных полей во всем пространстве бесконечна. Однако поскольку полная энергия материи (скалярного и электромагнитного полей) и гравитационного поля, совпадающая согласно принципу эквивалентности с массой, конечна, можно говорить о компенсации «материальной» энергии гравитационной энергией, бесконечной и противоположной по знаку.

При островном распределении материи (пространство на бесконечности евклидово) и при отсутствии сингулярностей полная энергия материи и постоянного гравитационного поля выражается через тензор энергии-импульса материи T_μ^ν по формуле Толмена (2.20). В частности, при центральной симметрии [метрика (2.31)]

$$E = 4\pi \int (2T_0^0 - \sum_i T_i^i) \exp \frac{(\alpha + 2\beta + \gamma)}{2} dz, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.66)$$

Предположим, что существует сфера Ξ радиусом

$$z = z^* = \text{const}, \quad (2.67)$$

на которой

$$d\gamma/dz = (d\gamma/dz)(z^*) = 0. \quad (2.68)$$

Тогда, анализируя вывод формулы Толмена, данный в [67], нетрудно установить, что интеграл (2.66) дает правильный результат, если областью интегрирования считать пространство вне сферы E . Таким образом, если уравнение (2.67) имеет решение и все сингулярности расположены внутри сферы E , то формула Толмена применима. Этот результат, по-видимому, можно интерпретировать как существование области (внутри сферы E), где энергия материи полностью компенсирована противоположной по знаку энергией гравитационного поля.

В то же время при наличии сингулярностей, когда интеграл (2.66), взятый по всему пространству, расходится, наличие сферы E можно рассматривать как появление естественного обрезания в интегральной формуле для полной энергии. Именно эта ситуация имеет место при $H < 1$ для систем I и I_0 и при $h < 0$ для системы II (имеются в виду решения с $M > 0$).

Отметим, что подстановка в формулы (2.57) и (2.59) в качестве M и q масс и зарядов элементарных частиц приводит к таким значениям постоянных интегрирования, что сфера E существует. Приблизленно решая трансцендентное уравнение (2.68) в предположении $M\sqrt{\kappa} \ll 1$ (для известных частиц $M\sqrt{\kappa} \sim 10^{-20}$), оценим радиус сферы E , который характеризуется величиной

$$r^* = \exp [\beta (z^*)/2]: \quad (2.69)$$

$$r^* \approx \begin{cases} (8\pi/3M) [C^2 + (3/2) q^2] & \text{для систем I и } I_0; \\ 4\pi q^2/M & \text{для системы II.} \end{cases} \quad (2.70)$$

Если $C^2 \lesssim (3/2) q^2$ и q — заряд, равный электронному, то для обоих решений $r^* \approx 4\pi/137 M$, так что, например, если M — масса $\pi^\pm$ -мезона, то

$$r^* \sim 10^{-14} \text{ см.} \quad (2.72)$$

Отметим, что сфера E существует и для решения Райснера — Нордстрема

$$\exp [\gamma (r)] = \exp [-\alpha (r)] = 1 - \kappa M/4\pi r + \kappa q^2/2r^2; \quad \exp \beta = r^2. \quad (2.73)$$

Ее радиус при этом определяется точным равенством (2.71).

Скалярное поле и черные дыры. Описанные решения имеют несингулярный горизонт событий только в специальном случае (2.54), (2.55), на котором мы и остановимся. Метрика (2.54) впервые была получена в 1947 г. Маджумдаром и Папапетру для заряженного источника при соотношении между зарядом и массой $q = \sqrt{GM}$, что соответствует равновесию гравитационных и электростатических сил теории Ньютона. В [62] она получена для статического скалярного поля, а в [70] для статических скалярного и электромагнитного полей.

Эта метрика интересна в двух аспектах. Во-первых, она реализует решение типа райснер-нордстремовской черной дыры с внешним статическим безмассовым скалярным полем. В этом смысле данный результат опровергает вывод Бекенштейна (1972 г.) о том, что «статическая черная дыра не может обладать никаким внешним классическим... безмассовым скалярным полем». В доказательстве Бекенштейна исполь-

зается предположение об ограниченности всех «физических» скаляров (например, T , $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, φ^2 и т. д.) на несингулярном горизонте. В нашем же случае T и $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ действительно несингулярны, но φ^2 обращается в бесконечность при $r = r_0$ [см. (2.55)]. Доказательство же отсутствия внешнего массивного скалярного поля вида (2.2) можно получить и без предположения о несингулярности скаляров на горизонте [75], т. е. предположение Бекенштейна не является необходимым. Таким образом, решение (2.54) свидетельствует о том, что статическая черная дыра может иметь внешнее конформно-ковариантное безмассовое скалярное поле. Правда, при наличии этих полей новых характеристик статических черных дыр, помимо массы и заряда, не появляется, так как скалярный заряд S и электрический заряд q связаны с массой соотношением (2.61).

Во-вторых, при $q = 0$ [76], эта метрика для частного случая $M = m_L = \sqrt{c\hbar/2G} \sim 10^{-5}$ г была получена введением в метрику Шварцшильда ad h ос дополнительного отталкивающего квантовомеханического потенциала. Метрика (2.54) в отличие от [76] является точным самосогласованным решением. Будем интерпретировать ее аналогично [76] при $M = m_L$. Тогда $g_{00} = -(g_{11})^{-1} = (1 - L/r)^2$, где $L = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33}$ см, а третий член разложения в g_{00} , равный $(L/r)^2$, соответствует эффективному квантовомеханическому потенциалу отталкивания $(\hbar/r)^2/2m_L$, который связан с неопределенностью импульса $\hbar/r$, создаваемого скалярным безмассовым полем в центрально-симметричном гравитационном поле. Этот результат может иметь далеко идущие последствия при анализе коллапса и повлиять на вывод о неизбежности катастрофического сжатия в точку. В [76] показано, что наличие такого отталкивающего квантовомеханического потенциала при коллапсе шара из ферми-газа ведет к образованию отталкивающего «ядра», останавливающего сжатие. Представляет интерес рассмотреть аналогичную динамическую задачу с материей в виде полей и выяснить возможность образования отталкивающих ядер и остановки или обращения коллапса.

В связи с этим подчеркнем существенное различие метрики (2.54) и метрики Шварцшильда на примере силы, действующей со стороны тяготеющего центра на неподвижное пробное тело массы m :

$$F^i = -m\Gamma_{00}^i/g_{00}.$$

В метрике Шварцшильда [77]

$$F^2 = F^i F_i = m^2 r_g^2 / 4r^2 (1 - r_g/r),$$

и при стремлении r к гравитационному радиусу r_g сила становится бесконечной. В метрике (2.54)

$$F^2 = m^2 r_0^2 / r^4,$$

т. е. сила монотонно увеличивается с уменьшением r и остается конечной при $r = r_0$ [78].

В то же время интеграл $\int \sqrt{-g_{11}} dx^1$, описывающий (в статической системе отсчета) длину пути по радиусу, на горизонте расходится в метрике (2.54) и сходится в метрике Шварцшильда.

Анализ радиального движения пробных частиц в метрике (2.54) осуществляется при помощи перехода в свободно падающую систему отсчета. При этом для пробной частицы существует минимальное значение $r_{\min}$ параметра r — радиуса сферы, описанной вокруг источника. Значение $r_{\min}$ зависит от начальных условий движения частиц, но всегда меньше r_0 . После остановки на сфере радиусом $r = r_{\min}$ частица снова возвращается в область $r > r_0$. Для движения по гиперболе, параболе и эллипсу имеем соответственно:

$$r_{\min} < r_0/2; r_{\min} = r_0/2; r_{\min} > r_0/2,$$

причем в последнем случае частица осциллирует между

$$r_{\min} \text{ и } r_{\max} > r_0.$$

Таким образом, если граница коллапсирующего тела с внешней метрикой (2.54) движется как совокупность пробных частиц, то она не стягивается в точку, и после максимального сжатия границы коллапс должен смениться антиколлапсом. Это происходит за конечное собственное время, но за бесконечное время для удаленного наблюдателя [78].

2.3. РЕШЕНИЯ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ В МЕТРИКЕ ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ МОДЕЛИ. СКАЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНКЕОНА [6]

Еще Планк отмечал, что из размерных констант c , G и $\hbar$ можно построить три новые константы, имеющие размерности длины, массы и времени, а именно: L , m_L и τ_L (см. § 1.1).

При этом $Lm_Lc = \hbar$. Уилер и независимо Д. И. Блохинцев [79] связали эти величины с флуктуациями гравитационного вакуума и пространства-времени. В [1,80] было показано, что если рассматривать квантовую частицу, размеры которой r совпадают с ее гравитационным радиусом $r_g = 2Gm/c^2$, то

$$r = r_g = \sqrt{2G\hbar/c^3} = L, \quad m = m_L = \sqrt{c\hbar/2G}, \quad (2.74)$$

т. е. получается частица, которая была названа в честь Планка — планкеон [80]. Далее было установлено [11], что статическое решение Эйнштейна для Вселенной постоянной кривизны формально пригодно и для планкеона, т. е. $R = 6/r^2$, $\varepsilon + 3p = 0$, причем радиус кривизны r совпадает с L . При использовании квадрированного уравнения Дирака в гравитационном поле (уравнение Фока — Иваненко) и свертки уравнений Эйнштейна получено:

$$m_{0,1}^2 = m^2 \text{ (обычная частица); } m_{0,2}^2 \approx (1/2)\sqrt{3/2} \hbar c/G \text{ (планкеон).}$$

Изложенные здесь соображения недостаточно строги и корректны. В [6] получены подобные результаты совместным решением уравнений скалярного и гравитационного полей. Остановимся на этом решении.

Рассмотрим систему, задаваемую лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_g,$$

где

$$\mathcal{L}_\varphi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi^* \nabla_\nu \varphi - (m^2 + \beta R) \varphi^* \varphi; \quad (2.75)$$

$$\mathcal{L}_g = (R - 2\lambda)/2\kappa; \quad (2.76)$$

φ — скалярное поле; $\beta = \text{const}$.

Если вместо комплексного рассматривать вещественное скалярное поле, то следует приписать множитель $1/2$ перед всей правой частью выражения (2.75).

Вариация интеграла действия

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4 x \quad (2.77)$$

по φ , φ^* и $g^{\mu\nu}$ дает соответственно уравнения скалярного поля

$$(\square + m^2 + \beta R) \varphi^* = 0; (\square + m^2 + \beta R) \varphi = 0 \quad (2.78)$$

и гравитационного поля

$$R_\mu^\nu - (1/2) \delta_\mu^\nu R + \delta_\mu^\nu \lambda = -\kappa T_\mu^\nu \quad (2.79)$$

с тензором энергии-импульса материи (скалярного поля)

$$T_\mu^\nu = \nabla_\mu \varphi^* \nabla^\nu \varphi + \nabla^\nu \varphi^* \nabla_\mu \varphi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_\varphi - 2\beta (R_\mu^\nu + \nabla_\mu \nabla^\nu - \delta_\mu^\nu \square) \varphi^* \varphi. \quad (2.80)$$

Этот тензор обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T_{\nu\mu}; \quad \nabla_\mu T_\nu^\mu = 0; \\ T &= T_\mu^\mu = 2m^2 \varphi^* \varphi - 2(1 - 6\beta) [\nabla^\rho \varphi^* \nabla_\rho \varphi - (m^2 + \beta R) \varphi^* \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

При $\beta = 1/4$ уравнение (2.78) совпадает с уравнением Фока — Иваненко, а при $\beta = 1/6$ — с уравнением (2.1).

Ищем решение системы уравнений (2.78), (2.79) в виде статической метрики Эйнштейна

$$ds^2 = dt^2 - \rho^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (2.82)$$

и рассмотрим одночастичное состояние поля φ .

Поскольку искомый объект представляет собой замкнутый мир (микро-селенная), полный заряд внутри него должен быть равен нулю. Поэтому поле φ следует выбрать вещественным. Однако условие одночастичной нормировки некантового поля φ

$$i \int (\varphi^* \partial_\alpha \varphi - \partial_\alpha \varphi^* \varphi) d\Sigma^\alpha = 1, \quad (2.83)$$

где $d\Sigma^\alpha$ — векторный элемент 3-площади на произвольной пространственно-подобной гиперповерхности Σ , несовместимо с предположением о вещественности φ . Чтобы избежать этой трудности, рассмотрим вещественное скалярное поле в схеме вторичного квантования, полагая при этом $\beta = 1/6$.

Согласно [6,64] гейзенберговский оператор $\hat{\varphi}$, удовлетворяющий уравнению (2.78), записывается в виде

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho^{3/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2} P^{s\sigma}(\chi, \theta, \varphi_1) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\exp(ikt)}{\sqrt{k}} C_{s\sigma}^+ + \frac{\exp(-ikt)}{\sqrt{k}} C_{s\sigma}^- \right\}, \quad (2.84)$$

где $P^{s\sigma}$ — ортонормированные гармонические полиномы на единичной 3-сфере; $C_{s\sigma}^\pm$ — операторы рождения (+) и уничтожения (—) частиц с определенным импульсом s [63] (σ — остальные квантовые числа), подчиняющиеся каноническим перестановочным соотношениям

$$[C_{s\sigma}^\pm, C_{s'\sigma'}^\pm] = 0; \quad [C_{s\sigma}^-, C_{s'\sigma'}^+] = \delta_{ss'} \delta_{\sigma\sigma'}; \quad (2.85)$$

$$k = k(s) = \sqrt{(s+1)^2/\rho^2 + m^2}. \quad (2.86)$$

Искомое состояние поля $\hat{\phi}$ запишем в виде

$$|1\rangle = |s\sigma\rangle = C_{s\sigma}^+ |0\rangle; \quad (2.87)$$

$|1\rangle$ — есть собственный вектор оператора энергии

$$\hat{E} = \int \hat{T}_{00} d\Sigma = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2} k (C_{s\sigma}^+ C_{s\sigma}^- + C_{s\sigma}^- C_{s\sigma}^+); \quad (2.88)$$

$$:\hat{E}:|1\rangle = k|1\rangle,$$

где $d\Sigma = \rho^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi_1$.

Так как гравитационное поле не квантуется, в правой части уравнений (2.79) следует заменить величины T_μ^ν средними:

$$\left. \begin{aligned} \langle : \hat{T}_\mu^\nu : \rangle &= \langle 1 | : \hat{T}_\mu^\nu : | 1 \rangle; \\ R_\mu^\nu - (1/2) \delta_\mu^\nu R + \delta_\mu^\nu \lambda &= -\kappa \langle : \hat{T}_\mu^\nu : \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

где двоеточие, как обычно, означает нормальное произведение.

В метрике (2.82) ненулевые компоненты тензора Риччи

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = 2/\rho^2, \quad (2.90)$$

скалярная кривизна $R = 6/\rho^2$. Поскольку для вещественного поля $\hat{\phi}$, согласно (2.81) $\hat{T}_\mu^\mu = m^2 \hat{\phi}^2$, сверткой уравнений (2.89)

$$-R + 4\lambda = -\kappa \langle : \hat{T} : \rangle \quad (2.91)$$

получим

$$\langle 1 | : \hat{\phi}^2 : | 1 \rangle = \text{const.} \quad (2.92)$$

В то же время из (2.84) следует

$$\langle : \hat{\phi}^2 : \rangle = (P^{s\sigma})^2 / \rho^3 k. \quad (2.93)$$

Условие (2.92) и свойства гармонических полиномов приводят к тому, что

$$\left. \begin{aligned} s=0, \quad P^{s\sigma} &= P^{01} = 1/\sqrt{2\pi}; \\ \langle : \hat{\phi}^2 : \rangle &= 1/2\pi^2 \rho^3 k^0 = 2\gamma^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

где $k^0 = k(0) = \sqrt{m^2 + 1/\rho^2}$.

После несложных вычислений имеем:

$$\left. \begin{aligned} \langle : \hat{T}_0^0 : \rangle &= 2k^{02} \gamma^2; \\ \langle : \hat{T}_1^1 : \rangle &= \langle : \hat{T}_2^2 : \rangle = \langle : \hat{T}_3^3 : \rangle = -(2/3) \gamma^2 / \rho^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

а остальные компоненты $\langle : \hat{T}_\mu^\nu : \rangle$ равны нулю.

Подстановка (2.90) и (2.95) в (2.89) дает два несовпадающих уравнения

$$2\kappa\gamma^2 k^{02} \rho^2 = 3 - \Lambda; \quad (2.96)$$

$$(2/3) \kappa\gamma^2 = \Lambda - 1, \quad (2.97)$$

где $\Lambda = \lambda\rho^2$; $\gamma^2 = 1/4 \pi^2 \rho^3 k^0$. Ввиду очевидной положительности левых частей (2.96) и (2.97) существует условие

$$1 < \Lambda < 3. \quad (2.98)$$

Система (2.96), (2.97) приводит к квадратному уравнению относительно k^0 :

$$\begin{aligned} 3\kappa\rho^2 k^{02} - 12\pi^2 \rho^3 k^0 + \kappa &= 0; \\ k^0 &= (1 / \kappa\rho) (2\pi^2 \rho^2 \pm \sqrt{4\pi^4 \rho^4 - (1/3) \kappa^2}). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Условие вещественности энергии k^0

$$\rho \geq \rho_0 = \sqrt[4]{\kappa/\pi} \sqrt[4]{12} \quad (2.100)$$

означает существование минимального радиуса ρ_0 , которому соответствует $\Lambda = \Lambda_0 = 2$. При $\rho = \rho_0$ решение для k^0 единственно, и выполняется равенство, аналогичное соотношению неопределенностей:

$$k^0(\rho_0) \rho_0 = 1/\sqrt[4]{3}; \quad (2.101)$$

$$k^0(\rho_0) = \pi \sqrt[4]{4/3} \kappa^{-1/2}. \quad (2.102)$$

Численным расчетом получаем

$$\rho_0 = 1,35 \cdot 10^{-33} \text{ см}; \quad k^0(\rho_0) = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ г}. \quad (2.103)$$

Представляет интерес рассмотреть безмассовое скалярное поле ($m = 0$). При этом к системе (2.96)—(2.97) согласно определению k^0 добавляется условие

$$k^0 \rho = \sqrt{m^2 \rho^2 + 1} = 1. \quad (2.104)$$

Решая совместно эти три уравнения, находим:

$$\rho = \sqrt[4]{\kappa/\pi} \sqrt[4]{3} \approx 1,5 \cdot 10^{-33}; \quad k^0 = \pi \sqrt[4]{3}/\sqrt[4]{\kappa} \approx 2,4 \cdot 10^{-5}, \quad (2.105)$$

$$[\rho] = \text{см}; \quad [k^0] = \text{г}.$$

Отметим, что использование скалярного поля, как некантованного с нормировкой (2.83), так и в схеме вторичного кантования, приводит к тем же результатам при $\beta = 1/6$ [6].

Если же отказаться от условия $\beta = 1/6$, то вместо (2.96), (2.97) будем иметь уравнения

$$2\kappa\gamma^2 k^{02} \rho^2 = 3 - \Lambda; \quad (2.106)$$

$$4 \beta \kappa \gamma^2 = \Lambda - 1, \quad (2.107)$$

где γ и ρ определены по-прежнему; $k^0 = \sqrt{m^2 + 6\beta/\rho^2}$ и полная энергия скалярного поля равна k^0 . Можно предположить $\Lambda = 0$ (теория без λ -члена), тогда $\beta < 0$, и величина $-T_1^1$, играющая согласно структуре тензора энергии-импульса роль давления, отрицательна. Это — известный факт в теории без λ -члена.

Из (2.106), (2.107) в этом случае следует

$$k^0 = 6\pi^2 \rho / \kappa; \quad (2.108)$$

$$\rho k^0 = \sqrt{-6\beta}. \quad (2.109)$$

Последнее равенство можно снова интерпретировать как соотношение неопределенностей в силу квантового характера рассматриваемого объекта. Приведем числовые результаты для $\beta = -1/6$:

$$\left. \begin{aligned} k^0 &= \pi \sqrt[4]{-216\beta} / \sqrt{\kappa} \approx 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ г}; \\ \rho &= (\sqrt{\kappa} / \pi) \sqrt{-\beta/6} \approx 1,05 \cdot 10^{-33} \text{ см}. \end{aligned} \right\} \quad (2.110)$$

Если же, что значительно естественнее, положить $\beta > 0$, то снова получим условие (2.98), а вместо (2.100), (2.101), (2.102) — формулы:

$$\rho \geq \rho_0 = \sqrt[4]{\beta/2} \sqrt{\kappa} / \pi; \quad (2.111)$$

$$k(\rho_0) \rho_0 = \sqrt{2\beta}; \quad (2.112)$$

$$k^0(\rho_0) = \pi \sqrt[4]{8\beta} \kappa^{-1/2}; \quad \Lambda(\rho_0) = 2. \quad (2.113)$$

Если $m = 0$, то

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= 3/2; \quad k^0 \rho = \sqrt{6\beta}; \quad \rho = (1/\pi) \sqrt[4]{2/3} \beta \sqrt{\kappa}; \\ k^0 &= \pi \sqrt{54\beta} / \sqrt{\kappa}. \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

Возникает вопрос об устойчивости полученных микровселенных. Такое исследование с критерием устойчивости Ляпунова было проведено К. А. Пирагасом [81]. Найденное им условие приводит к выводу о неустойчивости микровселенной при $3/2 \leq \Lambda < 3$. Для остающихся возможных значений Λ ($1 < \Lambda < 3/2$) необходимо дальнейшее исследование.

Пользуясь формализмом, развитым выше, рассмотрим малые возмущения нашей системы. Будем искать метрику в виде

$$ds^2 = [1 + 2\alpha(t)] [dt^2 - \rho^2 d\chi^2 - \rho^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi_1^2)], \quad (2.115)$$

где $\alpha(t) \ll 1$. При этом [6] оператор $\hat{\varphi}$ [решение уравнения (2.78)] запишется в виде

$$\hat{\varphi} = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}\rho^{3/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{(s+1)^2} P^{s\sigma}(\chi, \theta, \varphi_1) [u_s(t) C_{s\sigma}^+ + u_s^*(t) C_{s\sigma}^-], \quad (2.116)$$

причем функции u_s подчиняются уравнениям

$$\ddot{u}_s + [(s+1)^2/\rho^2 + m^2(1+2\alpha)] u_s \equiv \ddot{u}_s + k^2 u_s + 2\alpha m^2 u_s = 0 \quad (2.117)$$

и условиям

$$\dot{u}_s^* u_s - \dot{u}_s u_s^* = -2i; \quad (2.118)$$

члены вида $O(\alpha)$ отбрасываются. Как и раньше, ищем состояния скалярного поля в виде (2.87).

Для исследования уравнений (2.89) необходимо выписать R_0^0 и R в метрике (2.115)

$$R_0^0 = 3\ddot{\alpha}; \quad R = 6/\rho^2 - 12\alpha/\rho^2 + 6\ddot{\alpha} \quad (2.119)$$

и средние $\langle :\hat{T}_0^0: \rangle$ и $\langle :\hat{T}: \rangle$ для состояния (2.87):

$$\langle :\hat{T}_0^0: \rangle = (1 - 4\alpha) k^0 \gamma^2 \dot{u}_0^* u_0 + (k^{0^2} - 2\alpha k^{0^2} - 2\alpha/\rho^2) k^0 \gamma^2 \dot{u}_0^* u_0; \quad (2.120)$$

$$\langle :\hat{T}: \rangle = 2m^2 \gamma^2 k^0 \dot{u}_0^* u_0 (1 - 2\alpha).$$

Пусть $u_0 = [\exp(ik^0 t)/\sqrt{k^0}] (1 + \sigma)$, причем $\sigma(t) \ll 1$.

Введем обозначения: $2 \operatorname{Re} \sigma = X(t)$; $2 \operatorname{Im} \sigma = Y(t)$. Если положить $\alpha = 0$, $\sigma = 0$, то получаются уравнения нулевого приближения. Будем считать, что они выполнены. Тогда в первом приближении (когда отброшены все члены степени выше первой относительно α и σ), уравнения (2.89), (2.117) дают:

$$3\alpha/\rho^2 = \kappa \gamma^2 [3k^{0^2} \alpha + \alpha/\rho^2 + (1/2) k^0 (2k^0 X - Y)]; \quad (2.121)$$

$$-6\alpha/\rho^2 + 3\ddot{\alpha} = m^2 \kappa \gamma^2 (X - 2\alpha); \quad (2.122)$$

$$\ddot{Y} - 2k^0 \dot{X} = 0; \quad (2.123)$$

$$\ddot{X} = 2k^0 \dot{Y} + 4m^2 \alpha = 0. \quad (2.124)$$

Из условия (2.118) следует:

$$\dot{Y} - 2k^0 X = 0, \quad (2.125)$$

поэтому (2.123) выполнено автоматически; (2.121), как легко убедиться, также обращается в тождество, так что достаточно рассматривать (2.122) и следствие (2.124) и (2.125)

$$\ddot{X} + 4k^{0^2} X + 4m^2 \alpha = 0, \quad (2.126)$$

т. е. систему двух линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Очевидно, необходимым условием устойчивости микровселенной является отсутствие экспоненциально растущего множителя в функции $\alpha(t)$ — решении системы.

Из (2.122) сразу следует делать вывод о неустойчивости при $m = 0$, поскольку в этом случае решение имеет вид:

$$\alpha(t) = C_1 \exp(\sqrt{2}t/\rho) + C_2 \exp(-\sqrt{2}t/\rho). \quad (2.127)$$

При $m \neq 0$ для функции $\alpha(t)$ справедливо уравнение

$$\ddot{\alpha} + 2A\ddot{\alpha} + B\alpha = 0, \quad (2.128)$$

где коэффициенты A и B удобно выразить через Λ и ρ :

$$A = \frac{2(3 - \Lambda^2)}{3\rho^2(\Lambda - 1)}; \quad B = \frac{8}{3} \frac{2\Lambda^2 - 6\Lambda + 3}{\rho^4(\Lambda - 1)}. \quad (2.129)$$

Согласно сказанному необходимое условие устойчивости можно записать в виде

$$A > 0; A^2 > B > 0. \quad (2.130)$$

Выражения (2.129) позволяют легко убедиться, что при $1 < \Lambda < 3$ этим условиям удовлетворить невозможно. Действительно, из условия $A > 0$ следует, что $|\Lambda| < \sqrt{3}$, а из условия $B > 0$ — что либо $\Lambda < (3 - \sqrt{3})/2$, либо $\Lambda > (3 + \sqrt{3})/2$.

Таким образом, на основе рассмотрения самосогласованной задачи взаимодействия скалярного и гравитационного полей без привлечения дополнительных предположений (например, соотношение неопределенностей или его аналог удовлетворяется автоматически) получено решение в виде статической замкнутой микровселенной Эйнштейна с хорошо известными параметрами: радиус порядка 10^{-33} см и масса порядка 10^{-5} г.

Однако в рамках этой модели полученные статические решения неустойчивы. Возможно, что неустойчивость связана с конечным временем жизни микровселенных — планкеонов, и это согласуется с более поздней моделью (см. гл. 6), где они рассматриваются как элементы гравитационного вакуума. Рассмотрение многочастичных состояний поля меняет лишь параметры нулевого приближения (κ заменяется величиной $N\kappa$, где N — число частиц, причем все они обладают нулевым пространственным импульсом), а при исследовании на устойчивость получаются в точности выражения (2.128), (2.129) [6].

Следует, однако, еще раз подчеркнуть, что мы рассматривали не-квантованное гравитационное поле. Весьма вероятно, что учет квантовых гравитационных эффектов, которые, по-видимому, должны проявиться на расстояниях порядка 10^{-33} см, внесет изменения в полученные результаты.

Кроме того, представляет интерес аналогичное рассмотрение взаимодействия гравитационного поля с векторным, тензорным и спинорным полями. Правда, для таких полей с нулевой массой покоя сразу можно сделать вывод о неустойчивости модели Эйнштейна, так как при этом $T = T^\alpha_\alpha = 0$, и исследование приведет к уравнению (2.127) с нулевой правой частью.

Рассмотрим приложения к космологии [7]. Будем искать решения для системы N скалярных частиц, взаимодействующих только через создаваемое ими гравитационное поле. Простейшее решение этой задачи можно получить, рассматривая систему (2.75) — (2.76) в статической метрике Эйнштейна (2.82) и считая $\varphi = \varphi(t)$. Это решение, удовлетворяющее условию нормировки

$$(\varphi, \varphi) = i \int (\varphi^* \partial_0 \varphi - \partial_0 \varphi^* \varphi) d\Sigma = N, \quad (2.131)$$

где $d\Sigma = \rho^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi_1$, сводится к следующим:

$$\varphi = (N/4\pi^2 \rho^3 k)^{1/2} \exp(ikt); \quad (2.132)$$

$$3N\kappa \rho^3 k^2 - 12\pi^2 \rho^3 k + N\kappa = 0; \quad (2.133)$$

$$\lambda = (1 + N\kappa / 6\pi^2 \rho^3 k) / \rho^2, \quad (2.134)$$

где $k = \sqrt{m^2 + \rho^{-2}}$ имеет смысл энергии скалярного поля, приходящейся на одну частицу: $E = \int T_{00} d\Sigma = Nk$. В решении (2.132) — (2.134) два параметра могут задаваться в зависимости от дальнейшей конкретизации.

Применим (2.132) — (2.134) для оценки некоторых космологических величин, помня о том, что статическая модель Эйнштейна может служить лишь грубым приближением к реальной Вселенной.

Задавая k порядка массы адронов, т.е. 10^{-24} г, и ρ порядка наблюдаемого радиуса Вселенной 10^{28} см, из формул (2.133), (2.134) получаем:

$$N = \frac{12\pi^2 \rho^3 k}{\kappa (1 + 3\rho^2 k^2)} \approx \frac{4\pi^2 \rho}{\kappa k} \sim 10^{80}; \quad \lambda \approx \frac{1}{\rho^2} \sim 10^{-56}$$

($[\lambda] = \text{см}^{-2}$), что хорошо согласуется с существующими оценками для N и ограничениями на λ .

Уравнение (2.133) можно разрешить также относительно k :

$$k = (6\pi^2 \rho^2 \pm \sqrt{36\pi^4 \rho^4 - 3N^2 \kappa^2}) / 3N\kappa\rho,$$

что приводит в силу вещественности k к существованию максимально возможного числа частиц во Вселенной $N_{\text{макс}}$ при заданном ρ :

$$N_{\text{макс}} = \pi^2 \rho^2 \sqrt{12/\kappa}.$$

Для $\rho = 10^{28}$ см число частиц $N \sim 10^{121}$ и соответственно

$$k = 2\pi^2 \rho / N\kappa \sim 10^{-65}; \quad \lambda = 2/\rho^2 \sim 10^{-56}$$

($[k] = \text{г}$; $[\lambda] = \text{см}^{-2}$). Эти значения N и k совпадают с оценками числа и массы покоя фотонов и гравитонов, полученными в [1,80] при исследовании электродинамики в римановом пространстве. В нашем же случае такие возможные частицы можно интерпретировать как *скалярные гравитоны*, поскольку они возникают в результате взаимодействия скалярного и гравитационного полей. В современной интерпретации это могут быть хиггсовские мезоны.

Сформулированную N -частичную самосогласованную задачу можно решить для безмассового скалярного поля в нестатической метрике закрытой изотропной модели [7, 82]:

$$ds^2 = b^2(t) [dt^2 - \rho^2 d\chi^2 - \rho^2 \sin^2 \chi d\Omega^2].$$

В этой метрике система (2.78) — (2.79) записывается в виде

$$(b\varphi)'' + b\varphi/\rho^2 = 0; \quad (2.135)$$

$$3(1/\rho^2 + \dot{b}^2/b^2) [1 - (\kappa/3)\varphi^*\varphi] - \lambda b^2 = \kappa [\dot{\varphi}^*\dot{\varphi} + (\dot{b}/b)(\varphi^*\varphi)]; \quad (2.136)$$

$$\ddot{b} + b/\rho^2 - 2\lambda b^2/3 = 0. \quad (2.137)$$

Из уравнений (2.79) используем только чисто временную компоненту и свертку. Остальные уравнения Эйнштейна являются следствием системы (2.135) — (2.137). Решая совместно (2.135) и (2.137), мы удовлетворим (2.136) при определенном условии на постоянные интегрирования.

Решением уравнения (2.135) является $\varphi = \varphi_0 \exp(-it/\rho)/b(t)$. Знак в показателе выбран в соответствии с нерелятивистским пределом (см. [83]) и с нормировкой (2.131), причем в этом случае

$$d\Sigma = b^2 \rho^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi_1.$$

= Из (2.131) следует выражение для амплитуды φ_0 , а именно: $\varphi_0 = \sqrt{N}/2\pi\rho$.

Уравнение (2.137) будет легко интегрироваться в метрике

$$ds^2 = d\tau^2 - a(\tau) [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2],$$

где $d\tau = b(t) dt$; $a(t) = \rho^2 b^2(t)$:

$$a(\tau) = \begin{cases} C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{4}{3}\lambda}\tau\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{4}{3}\lambda}\tau\right) + \frac{3}{2\lambda}, & \lambda > 0; \\ C'_1 \cos\left(\sqrt{-\frac{4}{3}\lambda}\tau\right) + C'_2 \sin\left(\sqrt{-\frac{4}{3}\lambda}\tau\right) + \frac{3}{2\lambda}, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (2.138)$$

Случай $\lambda = 0$ соответствует решению Фридмана при $T = 0$. Подобные решения для макроматерии хорошо известны в космологии [84].

Нас интересуют решения без сингулярностей, т. е. (2.138) при $C_1 \geq 0$ и $C_2 \geq 0$. К тому же решение (2.138), имеющее место при $\lambda > 0$, соответствует положительной энергии вакуума, если интерпретировать λ -член по Маккри и Я. Б. Зельдовичу [85].

Подстановкой (2.138) в уравнение (2.136) получим следующую связь между константами:

$$C_1 C_2 = 9/16 \lambda^2 - N\kappa/8\pi^2 \lambda.$$

Условие отсутствия сингулярностей в решении (неотрицательность C_1 и C_2) приводит к ограничению на число частиц:

$$N \leq 9\pi^2/2\kappa\lambda,$$

что для наблюдаемого значения $\lambda \sim 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ дает то же, что и ранее, значение $N_{\text{макс}} \sim 10^{121}$.

Среди решений (2.138) можно выделить асимптотически устойчивые по Ляпунову

$$a(\tau) = N\kappa/3\pi^2 + C_2 \exp(-\sqrt{6\pi^2/N\kappa}\tau), \quad \lambda = 9\pi^2/2 N\kappa,$$

которые при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к статическому решению Эйнштейна с $\rho = \sqrt{a(\infty)} = \sqrt{N\kappa/\pi}/\sqrt{3}$. Интересно отметить, что минимально возможное значение ρ (при $N = 1$) имеет порядок планковской длины 10^{-33} см [6]. Другой тип решения (2.138) пригоден для оценки времени жизни планкеона ($C_2 = 0$, $N = 1$). Характерный временной масштаб имеет порядок $\sqrt{N\kappa} \sim 10^{-43} \text{ с}$.

2.4. СВЕРХТЯЖЕЛЫЕ ЧАСТИЦЫ В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ [86]

В § 2.3 сделана попытка получить частицы размером 10^{-33} см и массой 10^{-5} г (планкеоны) из решения системы уравнений скалярного и гравитационного полей. При этом было существенно, что уравнения гравитации рассматривались с λ -членом, который принимал весьма большое значение (порядка ρ^{-2} , где ρ — радиус микровселенной). Как отмечал Я. Б. Зельдович, введение λ -члена может означать предположение, что вакуум обладает плотностью энергии $\varepsilon_V = \lambda \kappa^{-1}$ (в системе единиц $c = \hbar = 1$). Поскольку ρ получилось порядка $\kappa^{1/2}$, плотность энергии ε_V имеет порядок κ^{-2} . В то же время плотность энергии ε внутри замкнутой микровселенной $\varepsilon \sim k^0 \rho^{-3} \sim \kappa^{-2}$, т. е. того же порядка, что и ε_V . Эти оценки, возможно, свидетельствуют о наличии связи между свойствами планкеона и гравитационного вакуума.

Изложим альтернативный подход к вопросу о существовании сверхтяжелых частиц типа замкнутых микровселенных. Именно, вместо введения в теорию λ -члена используется так называемое фундаментальное скалярное поле. Идея включения такого поля в теорию гравитации принадлежит Йордану; в разных аспектах ее разрабатывал Дикке с сотрудниками [16]. В [73] предложен другой вариант скалярно-тензорной теории, характеризуемый введением фундаментального поля в полный лагранжиан со знаком, противоположным знаку лагранжиана материи.

Будем вводить фундаментальное скалярное поле в том же виде, что и в [73], но вместо макроскопической материи будем использовать материальное скалярное поле. Рассмотрим систему с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g - \mathcal{L}_\phi - \mathcal{L}_\psi, \quad (2.139)$$

где

$$\mathcal{L}_g = R/2\kappa; \quad (2.140)$$

$$\mathcal{L}_\psi = \nabla^\mu \psi^* \nabla_\mu \psi - (m_\psi^2 + \beta_\psi R) \psi^* \psi. \quad (2.141)$$

Символ ψ принимает значения ϕ и ϕ : ϕ обозначает материальное скалярное поле, и, следовательно, как указано в § 2.1, надо положить $\beta_\phi = 1/6$; ϕ — фундаментальное скалярное поле; априори значение β_ϕ ничем не фиксируется. Оставим пока β_ϕ произвольным; будем вместо β_ϕ писать просто β .

Вариация интеграла действия

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4 x; \quad d^4 x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2.142)$$

по ϕ , ϕ и $g^{\mu\nu}$ дает соответственно уравнения скалярного и гравитационного полей:

$$(\square + m_\psi^2 + \beta_\psi R) \psi = 0; \quad (2.143)$$

$$G_\mu^\nu = R_\mu^\nu - (1/2) \delta_\mu^\nu R = -\kappa T_\mu^\nu; \quad (2.144)$$

$$T_\mu^\nu = T_\mu^\nu(\phi) - T_\mu^\nu(\psi). \quad (2.145)$$

Тензор энергии-импульса

$$T_\mu^\nu(\psi) = \nabla^\nu \psi^* \nabla_\mu \psi + \nabla_\mu \psi^* \nabla^\nu \psi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_\psi - 2\beta_\psi [R_\mu^\nu + \nabla^\nu \nabla_\mu - \delta_\mu^\nu \square] \psi^* \psi \quad (2.146)$$

обладает свойствами

$$T_{\mu\nu}(\psi) = T_{\nu\mu}(\psi); \quad \nabla_\alpha T_\mu^\alpha(\psi) = 0;$$

$$T(\psi) = T_\alpha^\alpha = 2m_\psi^2 \psi^* \psi - 2(1 - \beta_\psi) \mathcal{L}_\psi.$$

В дальнейшем будем предполагать, что искомая метрика задана в виде метрики закрытой изотропной модели:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = b^2(t) [dt^2 - \rho^2 dx^2 - \rho^2 \sin^2 x (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi_1^2)] \quad (2.147)$$

с произвольной функцией $b(t)$; ρ — произвольный множитель размерности длины. Тогда недиагональные компоненты G_μ^ν и T_μ^ν исчезают, и

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -(3/b^4) (b^2/\rho^2 + \dot{b}^2); \\ G_1^1 &= G_2^2 = G_3^3 = -(1/b^4) (b^2/\rho^2 + 2b\ddot{b} - \dot{b}^2); \\ R &= -G_\mu^\mu = (6/b^3) (b/\rho^2 + \ddot{b}); \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3, \end{aligned}$$

где точка опять означает d/dt . Поэтому среди уравнений Эйнштейна (2.144) имеются два несовпадающих:

$$G_0^0 = -\kappa T_0^0; \quad (2.148)$$

$$G_1^1 = -\kappa T_1^1, \quad (2.149)$$

причем левая часть (2.148) содержит b и $\dot{b}$, тогда как левая часть (2.149) содержит b , $\dot{b}$ и $\ddot{b}$. В метрике (2.147) (а также в метрике открытых изотропных моделей, записанной в подходящих координатах) условие

$$\nabla_\alpha A^\alpha_0 = 0 \quad (2.150)$$

для тензора A_μ^ν можно привести к виду

$$(d/dt) (b^3 A_0^0) = 3\dot{b}b^2 A_1^1 \quad \text{или} \quad (d/dt) (b^4 A_0^0) = \dot{b}b^3 A_\alpha^\alpha.$$

Условие (2.150) выполняется как для G_μ^ν , так и для T_μ^ν , $R = \kappa T$, поэтому уравнение (2.149) и свертка уравнений (2.144) в метрике (2.147) являются следствием (2.148) и (2.150), за исключением случая $b \equiv 0$, т. е. статической метрики Эйнштейна.

Рассмотрим эту метрику в качестве искомой, полагая в выражении (2.147) $b \equiv 1$; тогда ρ имеет смысл радиуса кривизны. Полевые функции φ и ψ будем искать в виде $\varphi = \varphi(t)$; $\psi(t) = \psi$ и на функцию φ наложим еще условие одночастичности нормировки

$$(\varphi, \varphi) = i \int_\Sigma (\varphi^* \nabla_\alpha \varphi - \nabla_\alpha \varphi^* \varphi) d\Sigma^\alpha = 1, \quad (2.151)$$

где Σ — произвольная пространственно-подобная гиперповерхность; $d\Sigma^\alpha$ — векторный элемент 3-площади на Σ . Уравнения (2.143) принимают весьма простой вид:

$$\ddot{\psi} + (m_\psi^2 + \beta_\psi 6/\rho^2) \psi = 0$$

и имеют решения

$$\psi = \psi_0 \exp(-i\Omega_\psi t); \quad \Omega_\psi = \sqrt{m_\psi^2 + 6\beta_\psi/\rho^2}. \quad (2.152)$$

Для констант в (2.152) введем новые обозначения: $\psi_0 = \gamma$; $\phi_0 = \Gamma$; $\Omega_\varphi = k$; $\Omega_\psi = \omega$. Как следует из (2.151),

$$4\pi^2 \rho^3 k \gamma^2 = 1. \quad (2.153)$$

Очевидно (см. § 2.3), что

$$k = \int_\Sigma T_{0\alpha} d\Sigma^\alpha (t = \text{const})$$

является энергией материального скалярного поля φ .

С учетом (2.145), (2.146) уравнения (2.148) и (2.149) дают:

$$2\kappa\rho^2 (k^2\gamma^2 - \omega^2\Gamma^2) = 3; \quad (2.154)$$

$$2\kappa (-\gamma^2 + 6\beta\Gamma^2) = 3. \quad (2.155)$$

Из (2.154) и (2.155) имеем

$$\kappa\gamma^2 (k^2\rho^2 - 1 - m_\phi^2 \rho^2 \Gamma^2 \gamma^{-2}) = 3, \quad (2.156)$$

откуда приходим к неравенству

$$k\rho > 1. \quad (2.157)$$

Из (2.153) и (2.156) следует уравнение

$$\kappa\rho^2 s k^2 - 12\pi^2 \rho^3 k - \kappa s = 0,$$

поэтому

$$k = [6\pi^2 \rho^2 + \sqrt{36\pi^2 \rho^4 + \kappa^2 s^2}] / \kappa\rho s, \quad (2.158)$$

причем

$$s = 1 + m_\phi^2 \rho^2 / (12\beta + m_\phi^2 \rho^2). \quad (2.159)$$

Зависимость (2.158) $k(\rho)$ значительно упростится, если положить $m_\phi = 0$. Это предположение хорошо согласуется с выводами работы [73]. Тогда из (2.159) $s = 1$, и функция (2.158) имеет минимум, равный $k = k_0 = 3 \sqrt[4]{12} \pi / \sqrt{\kappa} \approx 7,5 \cdot 10^{-5}$ г при $\rho = \rho_0 = \sqrt{\kappa} / \pi \sqrt[4]{108} \approx 0,8 \cdot 10^{-33}$ см; $k_0 \rho_0 = \sqrt[4]{3}$, что согласуется с условием (2.157).

Таким образом, мы получили, что в данном формализме для самозамыкания квантовой скалярной частицы в собственном гравитационном поле она должна обладать энергией не менее $3\pi \sqrt[4]{12} / \sqrt{\kappa}$. При этом она равномерно «размазана» по всей замкнутой микровселенной с размерами порядка планковской длины.

Исследование полученных решений на устойчивость можно найти в [86].

Отметим, что как и в § 2.3, мы рассматривали неквантованное гравитационное поле. Весьма вероятно, что учет квантовых гравитационных эффектов, которые, по-видимому, должны проявиться на расстояниях порядка 10^{-33} см, внесет определенные изменения в полученные результаты.

Для скалярных полей не использовался формализм вторичного квантования, поскольку согласно [6] квантование материального скалярного поля не вносит изменений в результаты, а при квантовании фундаментального поля возникают трудности, связанные с его интерпретацией.

Остановимся на некоторых вопросах, касающихся используемого формализма и полученных результатов. Эти вопросы носят, по-видимому, дискуссионный характер.

Фундаментальное скалярное поле можно связать со свойствами гравитационного вакуума, который здесь проявляется локально в отличие от теории с λ -членом (см. § 2.3).

Толковать смысл фундаментального поля ϕ можно двояко. Во-первых, его можно интерпретировать как дополнительную компоненту гравитационного поля, как это делается в [73]. Тогда вопрос о вкладе поля ϕ в полную энергию системы является частью более общего вопроса об энергии гравитационного поля. Во-вторых, можно считать, что поле ϕ дает вклад в полную энергию материи. Этот вклад отрицателен, и для положительности полной энергии необходимо требовать присутствия какой-либо отличной от поля ϕ материи с тензором энергии-импульса $T_\mu^\nu(\mu)$, так чтобы всегда

$$T_0^0(\mu) \geq T_0^0(\phi). \quad (2.160)$$

В рассматриваемом случае полная энергия

$$E = \int_{\Sigma(t=\text{const})} [T_{0\alpha}(\mu) - T_{0\alpha}(\phi)] d\Sigma^\alpha = \frac{6\pi^2 \rho}{\kappa} > 0,$$

т. е. требование (2.160) выполнено. Однако, несмотря на эти доводы, первый подход нам кажется предпочтительнее.

Пока мы остаемся в рамках статической модели Эйнштейна, энергия $E_0(\varphi)$ сохраняется: $E_0(\varphi) = k = \text{const}$. При переходе к возмущениям системы энергия начинает зависеть от времени. Действительно, в первом приближении [86]

$$E(\varphi) = \int T_{0\alpha}(\varphi) d\varepsilon^\alpha = k + \mu \frac{k^2 - \rho^{-2}}{k} \alpha(t) = E_0(\varphi) + \Delta E(\varphi),$$

где μ — малый параметр; среднее по времени $\overline{E(\varphi)} = E_0(\varphi) = k$, а для среднего квадратического отклонения имеем:

$$\sqrt{\overline{\Delta E^2}} = \mu \frac{k^2 - \rho^{-2}}{k} \Xi,$$

где $\Xi = \text{const} \approx 1$, причем

$$\sqrt{\overline{\Delta E^2}} = (2/3) \mu k_0 \Xi \text{ при } k = k_{\text{мин}} = k_0. \quad (2.161)$$

Полученные результаты можно интерпретировать в соответствии с идеями, выдвинутыми в [86, 87]. Если предположить, что планкеон не вполне замкнут, то можно приписать его возбуждениям флюктуационную природу, и для μ порядка 10^{-20} , как легко видеть из (2.161), энергия возбуждения планкеона порядка энергии нуклона. Тогда рост амплитуды во втором приближении, возможно, связан с излучением гравитона [88].

Попробуем обрисовать картину на основе обсуждаемой модели замкнутых микровселенных. Физический вакуум можно представлять как совокупность планкеонов. В невозбужденном состоянии они ненаблюдаемы, а их возбуждения проявляются как элементарные частицы. Такая идея, вероятно, приводит к пространству со сложной топологией, например к пенообразному пространству, рассматриваемому Уилером [89].

Отметим, что данный подход имеет некоторые черты, сходные с «космологическим» подходом М. А. Маркова [90], который рассмотрел случай пылевидной материи, заполняющей Вселенную Фридмана. Однако нам кажется, что для малых областей (в [90] вблизи границы полузамкнутого мира с размерами $\delta \ll \ll 10^{-13}$ см) необходимо микроскопическое (полевое) описание материи.

В § 2.3, 2.4 и была предпринята попытка использовать полевые методы в микрокосмологическом подходе к теории элементарных частиц.

Глава 3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКАЛЯРНОГО, ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЕЙ: ЧАСТИЦЕПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ [91]

3.1. КРИТЕРИЙ ЧАСТИЦЕПОДОБНОСТИ [92]

Необходимость рассмотрения моделей протяженных частиц диктуется как современными экспериментальными данными об их сложной внутренней структуре, так и трудностями теорий, оперирующих с точечными объектами. Классические модели частиц (инстантоны, солитоны и т. п.) на основе нелинейных полевых уравнений широко обсуждаются в настоящее время. Однако это направление развивается практически без учета гравитации. Учет собственного гравитационного поля важен в силу универсального характера гравитационного взаимодействия: оно существует всегда и не может быть экранировано.

Нас интересуют полевые модели частиц, основанные на взаимодействии скалярного, электромагнитного и гравитационного полей. Уже для линейных материальных полей эта самосогласованная система в целом обладает естественной нелинейностью, индуцированной гравитационным полем. Учет прямого взаимодействия материальных полей расширяет возможность построения моделей, хотя, как и в плоском пространстве, остаются трудности с выбором и интерпретацией этих взаимодействий.

Следует иметь в виду, что нелинейность в основном должна проявляться на расстояниях, при которых существенны квантовые эффекты. Поэтому исследования в рамках классической нелинейной теории поля можно рассматривать как предварительный, но необходимый этап исследований при переходе к квантовым моделям.

Системы уравнений, описывающие реальные физические процессы, весьма сложны, и для них, как правило, нельзя найти точные решения. Однако в рамках теории возмущений невозможно выяснить многие принципиальные свойства взаимодействующих полей. Поэтому представляют особый интерес модельные нелинейные системы, допускающие точное решение.

Исследование таких моделей было начато на примере взаимодействия конформного скалярного и гравитационного полей [6] в связи с гипотезами [1, 80] и [12] (М. А. Марков). В дальнейшем были рассмотрены точные сферически-симметричные решения с конформным скалярным полем [7, 62], со скалярным и электромагнитным полями [70] (см. гл. 2), а также решения с прямым взаимодействием скалярного и электромагнитного полей в ОТО [92—94] и решения для этих полей с источниками в виде некогерентной материи [95]. В данной главе обсуждаются основные свойства этих решений главным образом с точки зрения их возможного использования в качестве моделей частиц [91].

В плоском пространстве частицеподобными обычно называют решения, обладающие следующими основными свойствами: 1) локализация в пространстве; 2) статичность или стационарность (сохранение формы решения, отсутствие расплывания со временем); 3) конечность полной энергии. При учете гравитации, т. е. в искривленном пространстве-времени, наибольшие трудности вызывает требование 3. Рассмотрение полной энергии материальных полей

$$E_f = \int T_0^0 \sqrt{-g} d^3x \quad (3.1)$$

недостаточно; в то же время нет полностью удовлетворительного определения энергии гравитационного поля. Правда, в асимптотически плоском пространстве (требование 1) полная энергия системы, включая энергию гравитационного поля (инертная масса m_I с точностью до c^2), определяется обычно через полный канонический тензор энергии-импульса и в статическом случае [96]

$$E_{\text{полн}} = m_I c^2 = \frac{1}{2\pi} \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \frac{[g^{00}]}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} [(-g) g^{00} g^{ik}] \right\},$$

$$i, k = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

где интегрирование ведется по всему 3-пространству в асимптотически декартовых координатах [иначе интеграл (3.2) может формально расходиться]. На асимптотике метрику можно записать в виде

$$ds^2 = \exp [2\gamma(R)] dx^0{}^2 - \exp [2\lambda(R)] dx^i dx^i, \quad R = \sqrt{x^i x^i}; \quad (3.3)$$

$$\exp(2\gamma) = 1 - \frac{2Gm}{c^2 R} + o(R^{-1}), \quad \exp(2\lambda) = 1 + \frac{2Gm^*}{c^2 R} + o\left(\frac{1}{R}\right), \quad (3.4)$$

где R — так называемый изотропный радиус; m — активная гравитационная (шварцшильдовская) масса; m^* совпадает с m_I в случае регулярного пространства-времени [переход в (3.2) к интегралу по удаленной 2-поверхности]. Равенство $m = m_I$ (принцип эквивалентности) априори не гарантировано и может нарушаться в двух случаях: в некоторых скалярно-тензорных теориях (СТТ) [97, 98] за счет того, что $m^* \neq m$ (мы ограничиваемся в основном задачами ОТО, так что $m^* = m$); при наличии сингулярности (тогда недостаточно интегрирования по удаленной поверхности).

Итак, сформулируем *критерий частицеподобности*: будем называть *частицеподобными* решения в искривленном пространстве-времени: 1) асимптотически плоские (имеется в виду и убывание материальных полей); 2) статические или стационарные; 3) всюду регулярные. Требование регулярности вместе с требованием 1 гарантирует как конечность величин E_f и m_I , так и выполнение равенства $m = m_I$. Кроме того, наличие сингулярности означает ограничение применимости данной модели или даже выход за рамки классических представлений о пространстве-времени. Однако требование 3 не выполняется не только для линейных материальных полей, но и для большого класса систем с прямым взаимодействием. Поэтому наряду с сильным критерием 1—3 имеет смысл сформулировать *слабый критерий частицеподобности*, в котором требования 1 и 2 остаются без изменения, а требование 3 заменяется следующими: 3а: $E_f < \infty$; 3б: $m = m_I$. Тогда, как мы убедимся, частицеподобными окажутся и некоторые сингулярные конфигурации. Вопросы построения частицеподобных моделей в теории гравитации рассматривались также в работах Бейлина и Эмерля (1972 г.), Бурцева (1973 г.), Дезера и Хигби (1971 г.) и Хигби (1972 г.). Однако эти работы либо основаны на приближенных решениях уравнений поля, либо предполагают наличие, по крайней мере, одного из таких нежелательных с физической точки зрения факторов, как тонкие пленки, поверхностные заряды, отрицательные плотности вещества и давления. Обсуждаемые ниже точные сферически-симметричные решения не имеют таких недостатков (за исключением § 3.4, где вводится отрицательная плотность).

3.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим систему с лагранжианом

$$L = R/2\kappa - F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/16\pi + (n/2) g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} + L_m + L_{\text{int}}, \quad (3.5)$$

где первый член описывает эйнштейновское гравитационное поле; второй и третий — свободные электромагнитное ($F_{\mu\nu}$) и скалярное (ψ) поля; L_m соответствует голой массе (некогерентной материи), а L_{int} описывает прямое взаимодействие скалярного и электромагнитного полей либо между собой (включая, возможно, самодействие), либо, если $L_m \neq 0$, с голой массой; $n = \pm 1$, причем $n = +1$ соответствует обычному, притягивающему скалярному полю с положительной плотностью энергии, $n = -1$ — отталкивающему, часто используемому в СТТ.

Пусть система является статической (требование 2), сферически-симметричной:

$$ds^2 = \exp [2\gamma (\xi)] dx^{0^2} - \exp [2\alpha (\xi)] d\xi^2 - \exp [2\beta (\xi)] d\Omega^2, \quad (3.6)$$

$$\psi = \psi (\xi), \quad F_{01} = -F_{10} (\xi), \quad \text{остальные } F_{\mu\nu} = 0. \quad (3.7)$$

Тогда в уравнениях Эйнштейна

$$G_\mu^\nu \equiv R_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu R/2 = -\kappa [T_{em}^\nu + n T_s^\nu + T_m^\nu + T_{\text{int}\mu}^\nu] \quad (3.8)$$

можно выразить три из четырех T_μ^ν [тензоров энергии-импульса для соответствующих членов в лагранжиане (3.5)] в виде (штрих означает $d/d\xi$)

$$T_{em}^\nu = -(F^{10} F_{10}/8\pi) \text{diag} (+1, +1, -1, -1); \quad (3.9)$$

$$T_s^\nu = [\exp (-2\alpha) \psi'^2/2] \text{diag} (1, -1, 1, 1); \quad (3.10)$$

$$T_m^\nu = \rho_m c^2 \text{diag} (1, 0, 0, 0). \quad (3.11)$$

Структура $T_{\text{int}\mu}^\nu$ и вид полевых уравнений для $F_{\mu\nu}$ и ψ существенно зависят от выбора L_{int} .

Сформулируем конкретный вид требований 1, 3 для статических сферически-симметричных систем.

Граничное условие на пространственной бесконечности — плоская метрика и исчезновение полей ψ и $F_{\mu\nu}$ (требование 1), т. е. при некотором $\xi = \xi_\infty$

$$\exp \gamma = 1; \quad \exp \beta = \infty; \quad \exp (-2\alpha + 2\beta) \beta'^2 = 1; \quad \psi = 0; \quad |\bar{E}| = 0, \quad (3.12)$$

где $|\bar{E}| = (-F_{01} F^{01})^{1/2}$ — напряженность электрического поля.

Условие существования регулярного центра конфигурации (требование 3) означает, что при некотором $\xi = \xi_c$

$$\left. \begin{aligned} \exp \beta = 0; \quad |\gamma| < \infty; \quad \exp (-2\alpha + 2\gamma) \gamma'^2 = 0; \\ \exp (-2\alpha + 2\beta) \beta'^2 = 1; \quad |\bar{E}| = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

т. е. пространство-время локально плоско и исчезает сила, действующая на пробный заряд.

Условие конечности полной энергии материальных полей (условие 3а) означает сходимость интеграла, взятого по всему 3-пространству:

$$E = E_s + E_{em} + E_{int} = 4\pi \int d\xi \exp(\alpha + 2\beta + \gamma) (n T_s^0 + T_{em}^0 + T_{int}^0). \quad (3.14)$$

Так называемая тяжелая масса для асимптотически плоской метрики (3.6) вычисляется по формуле

$$m = (c^2/G) (\gamma'/\beta') \exp \beta \mid_{\xi \rightarrow \xi_\infty}. \quad (3.15)$$

При вычислении инертной массы m_I учтен не только вклад удаленной поверхности, но и вклад поверхности, охватывающей возможную сингулярность и в пределе стремящейся к ней. В изотропных координатах, в которых произвольная метрика (3.6) имеет вид (3.3), получим

$$m_I = m^* + \Delta m = m^* + (c^2/G) R^2 (d\lambda/dR) \exp(\lambda + \gamma) \mid_{R=R_s}, \quad (3.16)$$

где R_s — координата сингулярной точки.

(Напомним, что в задачах ОТО $m^* = m$.) Координаты (3.3) не только асимптотически декартовы, но и локально декартовы в регулярном центре, если он существует. При этом автоматически выполняется условие $m_I = m^*$; оно, однако, может выполняться и на сингулярностях.

К уравнениям, соответствующим лагранжиану (3.5) (система полей в ОТО), приводятся некоторые уравнения СТТ гравитации. Действительно, пусть в СТТ (метрика $\tilde{g}_{\mu\nu}$, скалярное поле φ) лагранжиан имеет вид:

$$L_{СТТ} = A(\varphi) \tilde{R} + B(\varphi) \tilde{g}^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} + L^*, \quad (3.17)$$

где тильдой отмечены величины, полученные из $\tilde{g}_{\mu\nu}$; L^* — лагранжиан всей остальной материи. Тогда после конформного отображения [74]

$$\left. \begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= F(\hat{\psi}) g_{\mu\nu}; \quad F(\hat{\psi}) = 1/A[\varphi(\hat{\psi})]; \\ d\varphi/d\hat{\psi} &= A[AB + (3/2)(dA/d\varphi)^2]^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

лагранжиан приводится к квазиэйнштейновскому виду

$$L = R + n g^{\alpha\beta} \hat{\psi}_{,\alpha} \hat{\psi}_{,\beta} + F^2(\hat{\psi}) L^*, \quad (3.19)$$

где

$$n = \text{sgn}[2AB + 3(dA/d\varphi)^2], \quad (3.20)$$

и далее надо конкретизировать L^* (безразмерное поле $\hat{\psi}$ связано с полем ψ , входящим в (3.5), соотношением $\hat{\psi} = \psi \sqrt{\kappa}$).

В теорию с лагранжианом (3.17) входят как частные случаи:

ОТО с безмассовым (минимально связанным) скалярным полем — теория (1):

$$A \equiv 1; B \equiv n\kappa = \pm \kappa; F \equiv 1; \varphi \equiv \psi; \quad (3.21)$$

ОТО с конформным скалярным полем:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - \kappa\varphi^2/6; \quad B \equiv \kappa; \quad n = +1; \\ F(\hat{\psi}) &= \text{ch}^2(\hat{\psi}/\sqrt{6}); \quad \sqrt{\kappa}\varphi/\sqrt{6} = \text{th}(\hat{\psi}/\sqrt{6}); \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

СТТ Бранса — Дикке:

$$\left. \begin{aligned} A &= \varphi; \quad B = \omega/\varphi; \quad \omega = \text{const} \neq -3/2; \\ n &= \text{sgn}(\omega + 3/2); \quad F(\hat{\psi}) = 1/\varphi = \exp[(\omega + 3/2)^{-1/2} \hat{\psi}]. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

В дальнейшем мы будем часто пользоваться специальным выбором радиальной координаты — таким, что в метрике (3.6) выполняется (2.36). Приведем некоторые общие результаты в этих координатах. Для тензора Эйнштейна G_μ^ν имеем (2.38), откуда следует, что если полный тензор энергии-импульса системы (3.5), т. е. правая часть (3.8) удовлетворяет соотношению

$$T_1^1 + T_2^2 = 0, \quad (3.24)$$

то интегрирование уравнения (3.8) приводит к метрике

$$ds^2 = \exp[2\gamma(\xi)] dx^{0^2} - \frac{[\exp[-2\gamma(\xi)]]}{s^2(k, \xi)} \left(\frac{d\xi^2}{s^2(k, \xi)} + d\Omega^2 \right); \quad (3.25)$$

$$k = \text{const}, \quad s(k, \xi) = \begin{cases} k^{-1} \text{sh } k, & k > 0; \\ \xi, & k = 0; \\ k^{-1} \sin k, & k < 0. \end{cases}$$

При $\gamma(0) = 0$ метрика (3.25) является плоской на пространственной бесконечности, которой соответствует $\xi = 0$; без потери общности можно принять всюду $\xi > 0$.

Далее, нетрудно показать, что условия регулярности в центре для системы с метрикой (3.25) выполняются, только если

$$\xi_c = \infty, \quad k = 0, \quad \gamma'(\xi) = o(\xi^{-2}). \quad (3.26)$$

3.3. АНАЛИЗ СКАЛЯРНО-ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ РЕШЕНИЙ

Опишем кратко свойства статических сферически-симметричных решений для линейных скалярного и электромагнитного полей без источников в ОТО, о которых мы уже говорили в § 2.1 и 2.2. Для удобства приведем решение более общей задачи о нахождении внешнего поля заряженного тела в СТТ [лагранжиан (3.17), $L^* = Gc^{-4} \tilde{g}^{\alpha\gamma} \tilde{g}^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}$]. Преобразованием (3.18) эта задача сводится к задаче ОТО с минимально связанным полем ψ [лагранжиан (3.5), $L_m = L_{\text{int}} = 0$], в которой выполняется равенство (3.24) и, следовательно, метрика имеет вид (2.39). Уравнения свободных полей

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0; \quad \nabla_\alpha F^{\alpha\mu} = 0 \quad (3.27)$$

в координатах (2.36) при условиях (3.12) дают:

$$\psi = C\xi; \quad F_{01} = q \exp(2\gamma), \quad (3.28)$$

где C — скалярный заряд; q — электрический заряд. Функцию $\exp \gamma$ легко найти интегрированием (1)-уравнения Эйнштейна, и, наконец, применение преобразования (3.18) приводит к следующему решению в СТТ:

$$ds^2 = F(\hat{\psi}) \left\{ \exp(2\gamma) dx^{02} - \frac{\exp(-2\gamma)}{s^2(k, \xi)} \left[\frac{d\xi^2}{s^2(k, \xi)} + d\Omega^2 \right] \right\}; \quad (3.29)$$

$$\hat{\psi} = V\kappa\psi = V\kappa C\xi; \quad F_{01} = q \exp(2\gamma); \quad |\bar{E}| = |q|/r^2, \quad (3.30)$$

где $r = \sqrt{-g_{22}} = V\bar{F} \exp(-\gamma)/s(k, \xi)$ — обычный радиус сферы, и при $q \neq 0$:

$$\exp(2\gamma) = \frac{s^2(h, \xi_1)}{s^2(h, \xi + \xi_1)}, \quad s^2(h, \xi_1) = c^4/Gq^2; \\ h^2 \operatorname{sgn} h = k^2 \operatorname{sgn} k - n\kappa C^2/2, \quad (3.31)$$

а при $q = 0$:

$$\exp(2\gamma) = \exp(-2h\xi), \quad h^2 = k^2 \operatorname{sgn} k - n\kappa C^2/2. \quad (3.32)$$

Масса m определяется формулой

$$2Gm/c^2 = -V\kappa CdF/d\hat{\psi}|_{\hat{\psi}=0} - 2\gamma'|_{\xi=0}. \quad (3.33)$$

Решение (3.29) — (3.32) удовлетворяет граничным условиям (3.12) и содержит три независимые постоянные интегрирования: q , C и h (или m).

Без потери общности полагаем, что функция $F(\hat{\psi})$, определяющая выбор СТТ, удовлетворяет условию $F(0) = 1$; этого всегда можно добиться домножением лагранжиана (3.17) на постоянную. Постоянная ξ_1 определена с точностью до замен, сохраняющих значение $s^2(h, \xi_1)$. Координата ξ задана в области $0 < \xi < \xi_{\max}$, где $\xi_{\max}$, конечное или бесконечное, определяется поведением функций F , γ , $s(k, \xi)$ в (3.29).

Перейдем к обсуждению конкретных случаев.

Поле с минимальной связью. В ОТО с минимальным полем ψ справедливо решение (3.29) — (3.32) с $F \equiv 1$, причем в силу $dF/d\hat{\psi}(0) = 0$ имеет место соотношение

$$G(Gm^2 - q^2) = h^2 \operatorname{sgn} h = k^2 \operatorname{sgn} k - n\kappa C^2/2, \quad (3.34)$$

и условие $m > 0$ накладывает ограничения:

$$h > 0 \quad \text{при } q = 0; \quad \xi_1 > 0 \quad \text{при } q \neq 0; \\ h \geq 0; \quad \operatorname{tg}(-h\xi_1) > 0 \quad \text{при } h < 0. \quad (3.35)$$

При физически правдоподобном выборе $n = +1$ решение содержит голую сингулярность в центре ($\xi \rightarrow \xi_{\max}$, $r \rightarrow 0$) при всех значениях постоянных интегрирования, если $C \neq 0$. При $h \geq 0$ $\xi_{\max} = \infty$; сингулярность является притягивающей ($g_{00} \rightarrow 0$) и может быть названа скалярно-доминированной ($\psi \rightarrow \infty$; полная энергия скалярного поля $E_s = \infty$, тогда как энергия электрического поля $E_e < \infty$).

Этот случай соответствует малому электрическому заряду ($Gm^2 \geq q^2$), когда в электровакуумном решении Райснера — Нордстрема имеются горизонты; в присутствии скалярного поля они исчезают. Отметим, что $q = 0$ соответствует известному решению Фишера [71].

При $h < 0$ (большой заряд, $q^2 > Gm^2$) значение $\xi_{\max}$ совпадает с ближайшим нулем функции $s(h, \xi + \xi_1) = h^{-1} \sin h (\xi + \xi_1)$ и соответствует отталкивающей голой «электрической» сингулярности райснер-нордстремовского типа ($g_{00} \rightarrow \infty$; $\psi < \infty$, $E_s < \infty$; $E_e = \infty$).

Таким образом, эти решения содержат либо горизонты, либо расходящуюся на сингулярностях энергию E_f . Эти же сингулярности обуславливают ненулевую поправку Δm в формуле (3.16), причем для сингулярностей электрического типа $\Delta m = \infty$, а для сингулярностей скалярного типа поправка конечна: $\Delta m = (k - h)c^2/G > 0$.

Для черных дыр ($C = 0$, $q^2 \leq Gm^2$), применяя формулу (3.16) со значением R_s , соответствующим границе статической области — горизонту, получаем $\Delta m = 0$. Таким образом, из канонического определения энергии (3.2) следует, что вся энергия черной дыры сосредоточена в области вне горизонта.

Конформное поле. Решение для конформного поля ϕ в ОТО (см. также § 2.2) описывается формулами (3.29) — (3.32) в подстановке (3.22), т. е. $F(\hat{\psi}) = \text{ch}^2(V\kappa C\xi / V\sqrt{6})$. Поскольку $dF/d\hat{\psi}(0) = 0$, снова выполнены условия (3.34) и (3.35), однако появление конформного множителя F существенно меняет характер особенностей решения.

При $h < 0$ и $\xi = \xi_{\max}$ ($\xi_{\max} = \pi/|h| - \xi_1$, если без потери общности принять $0 < z_1 < \pi/|h|$) имеется голая сингулярность с отталкиванием ($r = 0$, $g_{00} = \infty$), подобная сингулярности Райснера — Нордстрема при $q^2 > Gm^2$. Однако в данном случае при $r \rightarrow 0$ расходятся как электрическая энергия E_e , так и скалярная энергия E_s^{conf} , определяемая интегрированием $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -компоненты тензора (2.24). Итак, даже при большом электрическом заряде сингулярность определяется обоими полями.

Случай $0 \leq h < h_0 \stackrel{\text{def}}{=} |C| V\sqrt{\kappa/6}$ отличается от рассмотренного тем, что $\xi_{\max} = \infty$, а также конечностью энергии E_e . Как и при $h < 0$, в центре ($\xi \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$) $g_{00} \rightarrow \infty$ (отталкивание) и $E_s \rightarrow \infty$ (скалярно-доминированная сингулярность).

При $h > h_0$, или $Gm^2 - q^2 > 4\pi C^2/3c^4$, снова $\xi_{\max} \rightarrow \infty$, однако величина r нигде не обращается в нуль, т. е. пространство не имеет центра. При $\xi \rightarrow \infty$ имеем $r \rightarrow \infty$, $g_{00} \rightarrow 0$ (голая притягивающая сингулярность). От бесконечности ($\xi = 0$) эта сингулярность отделена горловиной. Полная энергия E_e конечна, однако $E_s^{\text{conf}} \rightarrow -\infty$. Эта аномалия объясняется положительной неопределенностью плотности энергии в тензоре (2.24).

Наконец, при $h = h_0$, т. е. $Gm^2 = q^2 + (4\pi/3c^4) C^2$, сфера радиусом $\xi = \infty$ регулярна (хотя $\psi = \infty$, величины ϕ , r , g_{00} конечны), и продолжение решения за эту сферу удобно провести в координатах кривизны ($x^1 = r$). В результате получаем (2.54), (2.55). Это решение

описывает черную дыру со скалярным зарядом. Несмотря на бесконечное значение поля φ при $r = r_0$, соответствующий тензор энергии-импульса $T_{\mu}^{\nu \text{ conf}}$ несингулярен, а особенность метрики характерна лишь для данной системы отсчета. В области вне горизонта обе полевые энергии E_e и E_s^{conf} конечны.

Инертная масса для решений с конформным полем φ должна вычисляться по формуле (3.2) через метрику $g_{\mu\nu}$, соответствующую квази-эйнштейновскому лагранжиану (3.19) [97], т. е. по формуле (3.33) с $F \equiv 1$. Следовательно, полная энергия — та же, что и в системе с минимальным полем ψ , кроме случая черной дыры (2.54), (2.55). Для нее область $r < Gm/c^2 + h$ получается продолжением за регулярную сферу, соответствующую центру в решении с $F \equiv 1$, и для вычисления вклада этой области необходимо дополнительное исследование.

Однако можно показать [99], что решение (2.54), (2.55) неустойчиво относительно монопольных возмущений, и мы его в дальнейшем не будем рассматривать.

Не будем также описывать свойства электровакуумного решения теории Бранса—Дикке; отметим лишь, что при $\omega > -3/2$ решение содержит голую сингулярность при любом выборе постоянных интегрирования (кроме, разумеется, $C = 0$). Вычисление m_I , как и ранее, сводится к проделанному для метрики (3.29) с $F \equiv 1$.

Таким образом, решения с линейными полями не удовлетворяют ни сильному критерию частицеподобности, ни слабому, за исключением решения Райснера—Нордстрема с горизонтом, статическая область которого формально удовлетворяет слабому критерию.

3.4. МОДЕЛИ ЧАСТИЦ С НЕКОГЕРЕНТНОЙ МАТЕРИЕЙ

По-видимому, простейший способ получения несингулярной модели частицы — рассмотрение протяженных источников вакуумных полей, описанных в § 3.3, в виде распределений электрически и скалярно заряженной материи. Решение полевых уравнений для таких распределений в рамках обобщенной СТТ (3.17) можно получить, сведя задачу к соответствующей задаче ОТО преобразованиями (3.18). Пусть в пространстве с метрикой $\tilde{g}_{\mu\nu}$ задано распределение материи без давления с плотностями массы, электрического и скалярного зарядов соответственно $\tilde{\rho}_m$, $\tilde{\rho}_e$, ρ_φ и уравнения полей φ и $F_{\mu\nu}$ имеют вид:

$$2B(\varphi) \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \varphi - (dA/d\varphi) \tilde{R} + (dB/d\varphi) \tilde{g}^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} = -8\pi\rho_\varphi; \quad (3.36)$$

$$\tilde{\nabla}^\alpha F_{\alpha\mu} = -4\pi\tilde{\rho}_e \tilde{g}_{\mu\alpha} \tilde{u}^\alpha, \quad (3.37)$$

где $\tilde{u}^\mu$ — 4-скорость вещества. Тогда после преобразования (3.18) получаем распределение вещества в пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$, обладающее следующими плотностями и 4-скоростью:

$$\rho_m = F^2(\widehat{\psi}) \tilde{\rho}_m; \quad \rho_e = F^{3/2} \tilde{\rho}_e; \quad \rho_s = \frac{nG}{c^2} F \frac{d(F)}{d\widehat{\psi}} \tilde{\rho}_m + F^2 \frac{d\varphi}{d\psi} \rho_\varphi; \quad (3.38)$$

$$u^\mu = F^{1/2} \tilde{u}^\mu,$$

и уравнения для полей ψ и $F_{\mu\nu}$

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \hat{\psi} = -4\pi\rho_s; \quad \nabla_\alpha F^{\alpha\mu} = -4\pi\rho_e u^\mu. \quad (3.39)$$

Для поля $g_{\mu\nu}$ справедливы уравнения Эйнштейна (3.8), причем $T_{\mu}^{\nu} = 0$. (Как обычно, динамические переменные выбраны таким образом, что L_{int} , обуславливающее правые части уравнения (3.39), не дает вклада в тензор энергии-импульса, т. е. $L_{\text{int}} \sqrt{-g}$ не зависит от $g^{\mu\nu}$.) Поэтому в статической сферически-симметричной метрике в правой части (3.8) стоит сумма тензоров (3.9) — (3.11), удовлетворяющая условию (3.24), и метрика $g_{\mu\nu}$ имеет вид (3.25), а метрика $\tilde{g}_{\mu\nu}$ — вид (3.29). Из уравнений (3.39) и составляющих (0) , (1) уравнений (3.8) следует:

$$\hat{\psi}'(x) = 4\pi \int \frac{\rho_s \exp(-2\gamma)}{s^4(k, \xi)} d\xi; \quad (3.40)$$

$$\exp(-\gamma) F_{01} = Q(\xi) = 4\pi \int \frac{\rho_e \exp(-3\gamma)}{s^4(k, \xi)} d\xi; \quad (3.41)$$

$$|\bar{E}| = |Q(\xi)|/r^2; \\ 4\pi G\rho_m/c^2 = s^4(k, \xi) \exp(2\gamma) (\gamma'' - GQ^2 \exp(2\gamma)/c^4); \quad (3.42)$$

$$GQ^2 \exp(2\gamma)/c^4 = \gamma'^2 + n\hat{\psi}'^2/2 - k^2 \operatorname{sgn} k. \quad (3.43)$$

Здесь $Q(\xi)$ имеет смысл интегрального электрического заряда внутри сферы радиусом $\xi = \text{const}$.

Формулами (3.29), (3.40) — (3.43) полностью определяется общее статическое сферически-симметричное решение для скалярно и электрически заряженной пыли в классе СТТ (3.17). Решение содержит две произвольные функции $\gamma(\xi)$ и $\hat{\psi}(\xi)$ и одну произвольную постоянную k .

Рассмотренное в § 3.3 скалярно-электровакуумное решение получается, если положить все плотности равными нулю. Если же $\hat{\psi} \equiv 0$, то приходим к распределениям заряженной пыли в ОТО и внешнему полю Райснера—Нордстрема, причем легко воспроизводятся все результаты работы Бейлина и Эмерля (1972 г.). Если одновременно «выключить» поля ψ и $F_{\mu\nu}$, то получим как следствие $\rho_m = 0$ (статические распределения нейтральной пыли в ОТО невозможны), и поле сводится к шварцшильдовскому.

Для построения протяженного изолированного источника рассматриваемых полей отождествим в вакуумном решении и решении с веществом некоторые сферы: $\xi = \xi_0$ (in : $\xi \geq \xi_0$; out : $\xi \leq \xi_0$) и потребуем выполнения условий сшивания. В данном случае они сводятся к условиям непрерывности $g_{\mu\nu}$, $g'_{\mu\nu}$ и нормальных составляющих напряженности электрического поля и градиента скалярного поля. Эти условия приводят к следующим требованиям на постоянные и граничные значения произвольных функций:

$$k_{\text{in}} = k_{\text{out}}; \quad [\gamma] = [\gamma'] = [\psi] = [\psi'] = 0; \quad Q(\xi_0) = q, \quad (3.44)$$

где скобки обозначают разрывы: $[f] = f_{\text{out}}(\xi_0) - f_{\text{in}}(\xi_0)$. В ОТО с минимальным полем ψ требование $[\psi] = 0$ не возникает, так как в out-решении существенна только производная ψ' .

Условия существования регулярного центра (3.13) (требование частицеподобности 3) для всех трех теорий (3.21) — (3.23) выполняются тогда и только тогда, когда [91]

$$\xi_c = \infty; \quad k = 0; \quad \gamma' = 0(\xi^{-2}), \quad \hat{\psi}' = 0(\xi^{-2}); \quad z \rightarrow \infty \quad (3.45)$$

[для теории (3.21) эти условия очевидны; для гипотезы (3.22) и (3.23) доказательство (3.45) довольно громоздко, и мы его опускаем].

Метрика (3.29) допускает еще один вид несингулярных моделей — модели без центра, но со второй пространственной бесконечностью типа рассмотренных Уилером и Эллисом (1973 г). Именно таково поведение метрики (3.29) при $k < 0$ и регулярных $F(\psi)$ и $\gamma(\xi) : r(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow 0$ и при $\xi \rightarrow \pi/|k|$. Такие модели протяженных тел (назовем их уилеровыми) должны сшиваться из трех решений:

$$\text{out} : 0 < \xi \leq \xi_0; \text{in} : \xi_0 \leq \xi \leq \bar{\xi}_0;$$

$$\overline{\text{out}} : \bar{\xi}_0 \leq \xi < \pi/|k|.$$

Постоянная k во всех решениях одинакова, тогда как C, q, m могут быть разными в out- и $\overline{\text{out}}$ -решениях — разные значения массы и зарядов для наблюдателей, разделенных горловиной. Однако можно утверждать, что *уилеровы модели с регулярной функцией $F(\psi)$ и неотрицательной плотностью массы ρ_m возможны только в теориях с $n = -1$* . В частности, *не существует уилеровых моделей для заряженных пылевых шаров в ОТО (с притягивающим скалярным полем или вообще без скалярного поля)*.

Если же допустить, что $\rho_m < 0$, то создание регулярной уилеровой модели пары заряженных частиц с $E_{\text{полн}} > 0$ возможно, так как по (3.34) при $C=0$ из неравенства $Gm^2 < q^2$ как раз следует $k < 0$.

Приведем пример *регулярной уилеровой модели в ОТО без скалярного поля* [так что внутреннее решение задается одной произвольной функцией $\gamma_{\text{in}}(\xi)$]. Пусть пыль нейтральна ($\rho_e = 0$). Тогда *единственное* решение для γ_{in} при условии $\rho_m \neq 0$ есть $\gamma_{\text{in}} = \text{const}$. Далее, $Q^2 = \text{const} = q^2$, т. е. заряды в обоих внешних райснер-нордстремовских решениях равны по значению и противоположны по знаку, и можно показать, что для согласования асимптотических значений функции $g_{00} = \exp[2\gamma(\xi)]$ на двух пространственных бесконечностях $\xi = 0$ и $\xi = \pi/|k|$ необходимо и достаточно равенство масс m . Тогда модель строится следующим образом:

$$\text{out} : 0 < \xi \leq \xi_0 = (\arcsin \delta)/|k|;$$

$$\text{in} : \xi_0 < \xi \leq \bar{\xi}_0 = \pi/|k| - \xi_0; \exp(2\gamma_{\text{in}}) = 1 - \delta^2;$$

$$\overline{\text{out}} : \bar{\xi}_0 \leq \xi < \pi/|k|,$$

где $\delta = \sqrt{Gm}/|q| < 1$. Сшивание производится по двум сферам одинакового радиуса, на которых во внешних решениях функция $\exp[\gamma(\xi)]$ имеет минимум. Электрическое поле не имеет источников, и его силовые линии идут от одной пространственной бесконечности до другой, так что реализуется идея Уилера о «заряде без заряда». Модель при этом описывает пару частица — античастица. В силу постоянства $g_{00} = \exp(2\gamma)$ во внутренней области на элементы вещества не действует никакая сила. В целом функция $\exp[2\gamma(\xi)]$, как и $\sin(k\xi)$, симметрична относительно значения $\xi = \pi/2|k|$, так что внешние области out и $\overline{\text{out}}$ идентичны; в частности, на второй бесконечности $\xi = \pi/|k|$ выполняются условия (3.12).

Радиус сферы внутри вещества $r_{\text{in}}(\xi) = -(g_{22}(\xi))^{1/2}$ и плотность $\rho_{\text{in}}(\xi)$ меняется по законам

$$r_{\text{in}} = r_{\text{мин}}/\sin(|k|\xi); \rho_m = -\rho_{\text{макс}} \sin^4(k\xi),$$

где $r_{\text{мин}}$ и $\rho_{\text{макс}}$ соответствуют горловине и зависят только от заряда:

$$r_{\text{мин}} = \sqrt{G}|q|/c^2; \rho_{\text{макс}} = c^6/4\pi G^2 q^2,$$

т. е. имеют значения, близкие к планковским, если q равно заряду электрона: $r_{\text{мин}} \approx 1,4 \cdot 10^{-34}$ см; $\rho_{\text{макс}} \approx 5,7 \cdot 10^{94}$ г/см³. Параметры границ вещество — вакуум (радиус r_0 и плотность $\rho_{m(0)}$, одинаковые для обеих границ) определяются однозначно массой и зарядом и не содержат гравитационную постоянную:

$$r_0 = r_{\text{мин}}/\delta = q^2/mc^2 = r_{\text{кл}}; \rho_{m(0)} = -\rho_{\text{макс}} \delta^4 = -m^4 c^6/4\pi q^6.$$

Для массы и заряда электрона ($\delta \approx 0,5 \cdot 10^{-21}$) $r_0 \approx 2,8 \cdot 10^{-13}$ см; $|\rho_{m(0)}| \approx 3,3 \cdot 10^9$ г/см³.

Полная негравитационная энергия системы разбивается на четыре части: энергии электрического поля в каждой из внешних областей ($E_{e(out)} = E_{e(out)} = mc^2/2$) и во внутренней области ($E_{e(in)}$), а также отрицательную энергию вещества E_m , причем

$$E_m = -2E_{e(in)} = -(|q|c^2/2\sqrt{G})(1-\delta^2)^{1/2}(\pi - 2\arcsin\delta).$$

При малых δ отрицательная величина $(E_m + E_{e(in)})c^{-2}$ имеет порядок планковской массы $|q|/\sqrt{G}$ (для электронного заряда q), и полная энергия $E_e + E_m$ также отрицательна. В то же время полная энергия с учетом гравитации

$$E_{полн} = m_I c^2 = 2mc^2,$$

так как область интегрирования в формуле (3.2) ограничена двумя одинаковыми асимптотиками с решением Райснера — Нордстрема на каждой. Величина m_I равна сумме инертных масс частицы и античастицы, так что противоречия с принципом эквивалентности нет. Чисто гравитационный вклад в $E_{полн}$ положителен при любом δ (так как $E_e + E_m < mc^2$), однако при малых δ для компенсации $E_e + E_m < 0$ он должен иметь порядок $|q|/\sqrt{G}$. Таким образом, в этой модели, несмотря на то, что m мало (скажем, имеет порядок массы электрона) гравитационное поле играет решающую роль в балансе энергии. Эта модель системы частица — античастица удовлетворяет сильному критерию частицеподобности.

Рассмотрим в ОТО частицеподобные модели с регулярным центром и как с минимальным (3.21), так и с конформным (3.22) скалярным полем. В обоих случаях для внешнего решения выполнено соотношение (3.34), и из условия регулярности $k = 0$ следует, что *регулярные модели без внешнего скалярного поля ($C = 0$) возможны только при $Gm^2 = q^2$ (известный в ОТО результат, распространенный здесь на конфигурации, в которых внутри вещества имеется скалярное поле). Электронейтральные регулярные модели с малым зарядом ($q^2 < Gm^2$ возможны только с отталкивающим скалярным полем ($n = -1$), модели с большим зарядом ($q^2 > Gm^2$) — только с притягивающим полем ($n = 1$).*

В последнем случае при $\rho_m \geq 0$ в регулярной модели $\gamma'_{in}(\xi) < 0$, и сшивание с γ'_{out} возможно лишь при $\xi_0 < \pi/2|h| - \xi_1$, откуда следует, что в регулярных моделях ОТО с $n = 1$ и неотрицательной плотностью вещества радиус источника

$$r_0 > d = \sqrt{G}|q|\sqrt{1-\delta^2}/c^2 \arcsin\delta, \delta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{G}m/|q|. \quad (3.46)$$

Если δ не слишком близко к 1, то d имеет порядок «классического радиуса» q^2/mc^2 . Для параметров реальных частиц (например, для электрона $\delta \sim 10^{-21}$) из (3.46) следует

$$r_0 > q^2/mc^2 = r_{кл}. \quad (3.47)$$

Подчеркнем, что ограничения (3.46) и (3.47) не зависят от выбора произвольных функций $\gamma(x)$ и $\hat{\psi}(x)$.

Приведем конкретный пример регулярной модели частицы, задавая γ и $\hat{\psi}$ в виде [95]

$$\gamma_{in}(\xi) = \gamma_0 + a/\xi^2; \quad \hat{\psi}_{in} = \hat{\psi}_0 + b/\xi^2$$

с постоянными $\gamma_0, \hat{\psi}_0, a, b$, которые при помощи условий сшивания выражаются через m, q, ξ_0 . В предположении $\delta \ll 1$ гравитационное поле слабо, $\gamma(\xi) = o(\delta^2)$, и того же порядка различия имеются между моделями (3.21) и (3.22). Получаем:

$$4\pi c^2 (r_0^4/q^2) \rho_m(r) = (r_0/r_{кл} - 1) - r^2/r_0^2;$$

$$\rho_e = 3q/4\pi r_0^3; \quad \rho_s = 3C/4\pi r_0^3.$$

Плотность ρ_m — убывающая функция r , и из $\rho_m \geq 0$ следует:

$$r_0 > r_{мин} = (4/3)r_{кл}; \quad \rho_m < \rho_{макс} = (3/4)^4 m^4 c^6 / 4\pi q^6.$$

(Центральная плотность максимальна, когда $r_0 = r_{мин}$; этот предельный случай отброшен, так как при $r = r_0 = r_{мин}$ отношения ρ_e/ρ_m и ρ_s/ρ_m бесконечны.)

Численные оценки дают: для электронов $r_{\min} \approx 4 \cdot 10^{-13}$ см; $\rho_{\max} \approx 0,9 \cdot 10^9$ г/см³; для протонов $r_{\min} \approx 2 \cdot 10^{-16}$ см; $\rho_{\max} \approx 10^{22}$ г/см³.

Эти модели с регулярным центром удовлетворяют сильному критерию частицеподобности (требования 1—3); в частности $m = m_I$.

В СТТ с $F(\psi) \neq \text{const}$ эффективная плотность скалярного заряда ρ_s отлична от нуля даже при $\rho_\phi \equiv 0$ [см. (3.38)], т. е. когда нет заряда, обусловленного прямым взаимодействием скалярного поля с веществом, что обычно и предполагается. При этом из (3.38) следует связь между функциями $\psi(\xi)$ и $\gamma(\xi)$:

$$nF\hat{\psi}''/(dF/d\hat{\psi}) + n\hat{\psi}'^2/2 = \gamma'' - \gamma'^2 + k^2 \operatorname{sgn} k,$$

так что в решении (3.29), (3.40) — (3.43) остается лишь одна произвольная функция. Перечислим ограничения, возникающие в этой связи в теориях (3.22) и (3.23) [91].

Для незаряженной материи ($Q \equiv \rho_e \equiv 0$) при $\rho_\phi \equiv 0$ в ОТО с конформным полем (3.22) не существует распределений с $\rho_m \geq 0$. В СТТ Бранса — Дикке (3.23) не существует статических пылевых распределений, кроме случая $\omega = -2$. В теории (3.23) при $\omega = -2$ функция $\hat{\psi}(\xi)$ произвольна; при $\omega \neq -2$ $\rho_m \equiv 0$. При всех других $F(\hat{\psi})$ произвольных функций нет, $\gamma(\xi)$ и $\hat{\psi}(\xi)$ находятся в квадратурах:

$$\exp(2\gamma) = \frac{\text{const}}{F}; \quad \left(\frac{d\xi}{d\hat{\psi}} \right)^2 = \frac{1}{4k^2 \operatorname{sgn} k} \left[\left(\frac{d \ln F}{d\hat{\psi}} \right)^2 + 2n \right].$$

Знак плотности ρ_m совпадает со знаком выражения

$$-(2 + n d \ln F / d\hat{\psi}) d^2 \ln F / d\hat{\psi}^2,$$

и для теории (3.22) $\rho_m < 0$.

Для заряженной материи при $\rho_\phi = 0$ в ОТО с конформным полем ϕ (3.22) не существует моделей с регулярным центром и $\rho_m \geq 0$. В СТТ Бранса — Дикке (3.23) при $\omega > -3/2$ модели с регулярным центром и $\rho_m \geq 0$ возможны, только если

$$1 \leq Gm^2/q^2 < (2\omega + 4) / (2\omega + 3) \quad (3.48)$$

(для удобства пользуемся исходной постоянной G , которая в теории Бранса — Дикке не совпадает с гравитационной постоянной, измеренной вдали от тел в опытах типа опыта Кавендиша).

В пределах $C \rightarrow 0$ или $\omega \rightarrow \infty$ получается условие регулярности заряженных пылевых шаров в ОТО: $Gm^2 = q^2$. Поскольку современные наблюдения дают оценку $\omega \geq 30$; $1 < (2\omega + 4) / (2\omega + 3) \leq 1,016$, из рассмотренного примера заряженных пылевых шаров можно заключить, что теория Бранса — Дикке почти не отличается от ОТО в плане существования равновесных конфигураций.

Условие (3.48) запрещает существование регулярных моделей с параметрами реальных частиц.

3.5. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ОТО

Переходя к обсуждению систем с нелинейными и взаимодействующими полями в ОТО, рассмотрим в первую очередь нелинейную калибровочно-инвариантную электродинамику. Полный лагранжиан имеет вид:

$$L = R/2\kappa + \Phi(I), \quad I = -F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (3.49)$$

где $\Phi(I)$ — произвольная гладкая функция с максвелловской асимптотикой: $\Phi(I) \sim I/16\pi$, $d\Phi/dI \rightarrow 1/16\pi$ при $I \rightarrow 0$. Статическое сферически-симметричное решение для этой системы имеет вид [101]:

$$ds^2 = f(r) dx^{0^2} - dr^2/f(r) - r^2 d\Omega^2; \quad (3.50)$$

$$f(r) = 1 - (\kappa/r) \int T_0^0 r^2 dr, \quad T_0^0 = 2I d\Phi/dI - \Phi; \quad (3.51)$$

$$(d\Phi/dI) F^{01} = q/r^2, \quad q = \text{const}. \quad (3.52)$$

Частный случай (3.49) — электродинамика Борна—Инфельда:

$$\Phi(I) = [1 - (1 - \sigma I)^{1/2}] / 8\pi\sigma, \quad (3.53)$$

где $\sigma = \text{const}$ — параметр нелинейности, который рассмотрен в [102].

Решение (3.50)—(3.52) удовлетворяет условию частицеподобности (при $r \rightarrow \infty$ асимптотика та же, что у поля Райснера—Нордстрема). Однако условие 3 невыполнимо ни при каком выборе функции $\Phi(I)$.

Действительно, из (3.52) следует, что

$$I (d\Phi/dI)^2 = 2q^2/r^2. \quad (3.54)$$

Преобразуем выражение для плотности энергии T_0^0 . Из (3.54) получаем

$$\Phi(I) = \sqrt{8} |q| \int_0^{\sqrt{I}} d(\sqrt{I})/r^2,$$

где нижнему пределу соответствует $r = \infty$. Отсюда для T_0^0 , применяя интегрирование по частям, находим:

$$T_0^0 = 4\sqrt{2} |q| \int_r^\infty r^{-3} \sqrt{I} dr. \quad (3.55)$$

Если решение имеет регулярный центр, то из условий (3.12) для метрики (3.50), в частности, следует требование $f(0) = 1$. При этом в выражении (3.51) интегрирование должно проводиться от 0 до r , так что

$$\frac{1}{r} \int_0^r T_0^0 r^2 dr \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0.$$

Это возможно, только если $T_0^0 r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$, и в силу (3.55) получаем требование $I \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$, которое приводит к противоречию с (3.54).

Таким образом, сильный критерий частицеподобности (условия 1—3) невыполним. Возникновение сингулярности метрики при $r = 0$ связано с бесконечной плотностью полевой энергии.

Рассмотрим условия, при которых выполняются требования 3а и 3б. Требование 3а означает сходимость интеграла, входящего в формулу (3.51), в пределах от 0 до ∞ , а требование 3б принимает вид:

$$r\sqrt{f}(\sqrt{f} - 1) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0.$$

Оно выполнено, если интеграл в (3.51) сходится при $r = 0$. Таким образом, из выполнения 3а следует выполнение 3б.

Энергия E_f конечна, если при $r \rightarrow 0$ или $I < \infty$, или $I \rightarrow \infty$, но $I r^2 \rightarrow 0$. В первом случае из формулы (3.52) и выражения для T_0^0 следует, что при $r \rightarrow 0$

$$\Phi(I) r^2 \rightarrow 0, \quad r^2 (d\Phi/dI) \rightarrow \text{const} \neq 0.$$

Во втором случае получаем, что $d\Phi/dI$ при $I \rightarrow \infty$ должно расти быстрее, чем $I^{1/2}$, т. е. $\Phi(I)$ — быстрее, чем $I^{3/2}$.

В обоих случаях необходимость обращения $d\Phi/dI$ в бесконечность подчеркивает существенно нелинейный характер поля $F_{\mu\nu}$.

Для нелинейности Борна—Инфельда (3.53) решение имеет вид:

$$F^{01} = \bar{q} (r^4 + 2\sigma\bar{q}^2)^{-1/2}, \quad \bar{q} = 16\pi q;$$

$$I = 2q^{-2} (r^4 + 2\sigma\bar{q}^2)^{-1};$$

$$T_0^0 = [(r^4 + 2\sigma\bar{q}^2)^{1/2} - r^2]/8\pi\sigma r^2.$$

Решение существует при всех r ($0 < r < \infty$), если параметр нелинейности $\sigma > 0$, и удовлетворяет слабому критерию частицеподобности. Его вид иллюстрирует полученные общие выводы.

3.6. СИСТЕМЫ С ПРЯМЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ СКАЛЯРНОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Рассмотрим примеры систем, включающих прямое взаимодействие скалярного и электромагнитного полей в ОТО, удовлетворяющих слабому и сильному критериям частицеподобности.

Пусть в лагранжиане (3.5)

$$L_{\text{int}} = \sigma F^{\alpha\beta} A_\alpha \psi_{,\beta}, \quad F_{\mu\nu} = -2A_{[\mu, \nu]},$$

где A_μ — электромагнитный 4-потенциал. В систему полевых уравнений входят

$$\nabla_\alpha (g^{\alpha\beta} \psi_{,\beta} + \sigma F^{\beta\alpha} A_\beta) = 0; \quad (3.56)$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\mu} - \sigma \nabla_\alpha (A^\alpha g^{\mu\beta} \psi_{,\beta} - A^\mu g^{\alpha\lambda} \psi_{,\lambda}) + \sigma F^{\mu\alpha} \psi_{,\alpha} = 0$$

и уравнения Эйнштейна (2.23) с $T_{\mu}^{\nu} = 0$ и

$$T_{\text{int}}^{\nu} = \sigma [2F^{\nu\alpha} (A_\mu \psi_{,\alpha} - A_\alpha \psi_{,\mu}) - \delta_\mu^\nu F^{\alpha\beta} A_\alpha \psi_{,\beta}].$$

В статическом сферически-симметричном случае T_{int}^{μ} обладает свойством (3.24), и для метрики в координатах (2.36) получаем выражение (3.25).

Уравнение (3.56) с учетом (3.25) легко интегрируется:

$$\psi' = \sigma \exp(-2\gamma) A_0 A_0' + C, \quad C = \text{const}.$$

Оставшиеся уравнения записываются в виде

$$(\exp(-2\gamma) A_0')' + 4\pi\sigma A_0 [\exp(-2\gamma) \psi']' = 0; \quad (3.57)$$

$$2\gamma'^2 = 2k^2 \operatorname{sgn} k + \kappa \exp(-2\gamma) A_0'^2 [(4\pi)^{-1} + \sigma^2 \exp(-2\gamma) A_0^2]. \quad (3.58)$$

Постоянная C имеет смысл скалярного заряда источника, внешнего по отношению к данной системе (например, локализованного на сингулярности); при $C = 0$ отличное от нуля скалярное поле полностью порождается взаимодействующим с ним электромагнитным полем.

В дальнейшем ограничимся предположением $C = k = 0$. [Условие $k = 0$ не только упрощает уравнения, но и является необходимым, хотя и недостаточным, для существования регулярного центра — см. (3.26).]

Условия на бесконечности для уравнений (3.57)—(3.58) имеют вид:

$$\gamma \rightarrow 0; A^2 \stackrel{\text{def}}{=} A_0 A^0 \rightarrow 0; |\bar{E}|^2 = \xi^4 A_0'^2 \rightarrow 0,$$

где $A = \exp(-\gamma) A_0$ — электростатический потенциал. Решение системы (3.57), (3.58) с учетом этих условий записывается в параметрическом виде [94]:

$$\left. \begin{aligned} A^2(x) &= (\bar{\kappa}/8\pi) (x^2 - x_0^2)^{-1}; \quad x_0 \equiv (\bar{\kappa}\sigma^2/2)^{1/2}; \quad \bar{\kappa} \equiv \kappa/8\pi; \\ \exp[2\gamma(x)] &= (x^2 - x_0^2) (x - x_+)^{-1+\delta} (x - x_-)^{-1-\delta}; \\ \xi &= \frac{1}{4\pi^{1/2} |q\sigma|} \left(\frac{x x_0}{x^2 - x_0^2} + \operatorname{Arcth} \frac{x}{x_0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

где

$$2x_{\pm} = -\bar{\kappa} \pm [\bar{\kappa}(\bar{\kappa} + 4\sigma^2)]^{1/2}; \quad \delta = (1 + 4\sigma^2/\bar{\kappa})^{-1/2}.$$

Для скалярного поля ψ и эффективного электрического заряда $Q(x)$ внутри сферы радиусом $x = \text{const}$ получаем:

$$\psi'(x) = \sigma Q A_0 = \frac{x^2 - x_0^2}{x(x - x_-)(x - x_+)} \frac{\kappa\sigma q}{\sqrt{8\pi}}; \quad (3.60)$$

$$Q(x) = qx^{-1} (x^2 - x_0^2) (x - x_+)^{-(1+\delta)/2} (x - x_-)^{-(1-\delta)/2}. \quad (3.61)$$

Постоянная $q = Q(\infty)$ — полный электрический заряд, определяющий электрическое поле на асимптотике.

Переменная x изменяется в пределах $x_0 \leq x \leq \infty$, причем $x_- < 0 < x_+ < x_0$. При $x \rightarrow \sqrt{\bar{\kappa}\sigma^2} = x_0$ величины $g_{00} = \exp(2\gamma)$ и $-g_{22} = r^2$ стремятся к нулю, т. е. метрика имеет сингулярность в центре. При всех $x > x_0$ метрика регулярна. В данном решении шварцшильдовская масса m однозначно связана с зарядом q : $m = G^{-1/2} |q|$. При q , равном заряду электрона, m имеет порядок планковской массы: $m \sim 10^{-6}$ г.

Для энергии материальных полей E_f [см. (3.14)] получаем конечное выражение

$$E_f = \frac{|q|}{2\bar{\kappa}^{1/2}} \left(\frac{\bar{\kappa} + 6\sigma^2 + x_0}{\bar{\kappa} + 4\sigma^2} + \frac{|\sigma| x_0}{(\bar{\kappa} + 4\sigma^2)^{3/2}} \ln \frac{x_0 - x_+}{x_0 - x_-} \right). \quad (3.62)$$

Далее, при помощи (3.16) убеждаемся в выполнении равенства $m = m_I$. Таким образом, несмотря на сингулярность в центре, решение удовлетворяет слабому критерию частицеподобности.

При снятии взаимодействия ($\sigma \rightarrow 0$) скалярное поле исчезает, и получаем частное решение Райснера—Нордстрема ($Gm^2 = q^2$), когда имеется один горизонт ($r = Gm/c^2$); область $\sqrt{\bar{\kappa}\sigma^2} < x < \infty$ переходит в область вне горизонта $Gm/c^2 < r < \infty$. Соответственно E_f превращается в энергию линейного поля $F_{\mu\nu}$, распределенную вне

горизонта. Однако при сколь угодно малом, но конечном σ величина (3.62), оставаясь близкой к $mc^2/2$, описывает энергию полей во всем пространстве.

При другом предельном переходе $\kappa \rightarrow 0$ (выключение гравитации) энергия E_f (3.62) стремится к бесконечности. Решение аналогичной задачи в плоском пространстве-времени также приводит к $E_f = \infty$.

Таким образом, в рассмотренном примере взаимодействия гравитационное поле играет регуляризующую роль, которая и позволяет получить частицеподобное решение.

Рассмотрим другой тип прямого взаимодействия в лагранжиане (3.5):

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \Psi(\psi) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/16\pi, \quad \Psi(0) = 0, \quad (3.63)$$

где функция Ψ пока еще не определена. В отличие от предыдущего случая это взаимодействие сохраняет градиентную инвариантность поля $F_{\mu\nu}$. На возможность подобного взаимодействия указывает, в частности, процесс $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

Полевые уравнения имеют вид:

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \Psi + (1/16) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d\Psi/d\psi = 0; \quad (3.64)'$$

$$\nabla_\alpha (F^{\alpha\beta} \Psi) = 0. \quad (3.65)$$

Полный тензор энергии-импульса

$$T_\mu^\nu = -(\Psi/4\pi) [F_{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} - (1/4) \delta_\mu^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] + \\ + \psi_{,\mu} \psi'^\nu - (1/2) \delta_\mu^\nu \psi_{,\alpha} \psi'^\alpha \quad (3.66)$$

в метрике (3.6) удовлетворяет условию (3.24), поэтому окончательно метрика имеет вид (3.25), а уравнение (3.65) дает

$$F^{01} = q\Psi^{-1} \exp(-2\alpha), \quad (3.67)$$

где $q = \text{const}$ — электрический заряд. Для определения функций $\psi(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ воспользуемся уравнениями

$$\psi'' = -q^2 \exp(2\gamma) \Psi_\psi \Psi^{-2}/8\pi; \quad (3.68)$$

$$\gamma'^2 = k^2 \text{sgn } k + \kappa q^2 \exp(2\gamma) \Psi^{-1}/8\pi - \kappa \psi'^2/2. \quad (3.69)$$

Эти уравнения можно решить, только задав явный вид функции $\Psi(\psi)$. Например, выбирая $\Psi(\psi) = \exp(\sigma\psi) - 1$, $\sigma = \text{const}$, получаем решение, удовлетворяющее принятым условиям на бесконечности:

$$\exp(2\gamma) = \left[\frac{8\pi \exp(\sigma C\xi)}{\kappa q^2 \Sigma s^2(h, \xi + \xi_1)} \right]^{1/\Sigma}, \quad \Sigma \equiv 1 + \frac{\sigma^2}{2\kappa},$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\Sigma} \left[C\xi + \frac{\sigma}{2\kappa} \ln \frac{\kappa q^2 \Sigma s^2(h, \xi + \xi_1)}{8\pi} \right],$$

где метрика и функция s определены согласно (3.25), а постоянные C (скалярный заряд), q , h , k и ξ_1 связаны соотношениями

$$s^2(h, \xi_1) = 8\pi/\kappa q^2 \Sigma; \quad \Sigma k^2 \text{sgn } k = h^2 \text{sgn } h + \kappa C^2/2.$$

Это решение содержит три независимые постоянные интегрирования — заряды C и q , а также h , которую можно связать с массой. Оно сингу-

лярно при всех значениях постоянных интегрирования. Метрика сингулярна в центре ($r = \exp [\beta (\xi)] \rightarrow 0$) при всех κC , кроме $\kappa C = -\sigma h$, $h > 0$, $\xi_1 > 0$, когда при $\xi = \infty$ имеется горизонт событий шварцшильдовского типа ($\exp \beta \rightarrow \text{const } t > 0$, $\exp \gamma \rightarrow 0$). Однако существует такой их выбор, что полная материальная энергия E_f конечна: $C = h = 0$, $\xi_1 > 0$. В этом случае

$$ds^2 = \left(\frac{\xi_1}{\xi + \xi_1} \right)^{2/\Sigma} dx^0{}^2 - \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\xi + \xi_1}{\xi_1} \right)^{2/\Sigma} \left[\frac{d\xi^2}{\xi^2} + d\Omega^2 \right];$$

$$E_f = (|q| C^2 / V G \Sigma) (\kappa + \sigma^2) / (2\kappa + \sigma^2).$$

В центре ($\xi \rightarrow \infty$, $\exp \beta \rightarrow 0$) электрическое поле конечно ($|\bar{E}| = -F_{01}F^{01} \rightarrow c^8/G^2\Sigma^2q^2$), а метрика и скалярное поле сингулярны ($\exp \gamma \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow \infty$). Отметим, что, как и в (3.60), скалярное поле существует при нулевом скалярном заряде благодаря взаимодействию ($\sigma \neq 0$). Нетрудно показать, что в этом решении гравитационная и инертная массы совпадают: $m = m_I = |q|/V\bar{G}\Sigma$. Таким образом, и это решение удовлетворяет слабому критерию частицеподобности.

При значениях m и q , соответствующих параметрам элементарных частиц, $\Sigma = q^2/Gm^2 \gg 1$ (например, для электрона $|q|/V\bar{G}m \sim 10^{21}$). Тогда размер области локализации полей и длина, на которой становится существенным взаимодействие, имеют порядок величины $r_{\text{кл}} = 1/\xi_1 = q^2/mc^2$ (для электрона $r_{\text{кл}} \approx 3 \cdot 10^{-13}$ см). Действительно, если $E_f(\bar{r})$ и $Q(\bar{r})$ — соответственно полевая энергия и эффективный заряд внутри сферы радиусом $\xi \geq \bar{\xi}$, или $r \geq \bar{r} = \exp [\beta (\bar{\xi})]$ ($r = \exp \beta$ — обычный сферический радиус, Q определяется соотношением $|\bar{E}| = |Q|/r^2 = |q|\Psi^{-1}/r^2$), то $E_f(r) = E_f(1 + r_{\text{кл}}/r)^{-1}$, $Q(r) = q(1 + r_{\text{кл}}/r)^{-2}$. Кривизна пространства-времени заметна лишь на ничтожно малых длинах порядка $r_{\text{кл}} \exp(-q^2/Gm^2)$, так что практически всюду пространство плоское. Наконец, при $\Sigma = 1 + \sigma^2/2\kappa \gg 1$ энергия системы является почти полностью полевой, $E_f \approx mc^2$, т. е. гравитационный вклад в энергию крайне мал.

В отличие от предыдущего решения в данном случае энергия E_f остается конечной при обоих предельных переходах $\sigma \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow 0$. Как и ранее, предельный вид решения при $\sigma \rightarrow 0$ совпадает с решением Райснера—Нордстрема с одним горизонтом, и энергия $E_f \rightarrow mc^2/2$. В пределе $\kappa \rightarrow 0$ получается конфигурация полей в плоском пространстве с конечной энергией $E_f = 4\pi |q/\sigma|$, которая расходится, если $\sigma \rightarrow 0$. Регуляризирующая роль гравитационного поля заключается в ограничении сверху на значение полевой энергии E_f при сколь угодно малом σ .

3.7. НЕСИНГУЛЯРНАЯ ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ ЧАСТИЦЫ [92]

Приведем пример решения с взаимодействующими полями, удовлетворяющего сильному критерию частицеподобности. Лагранжиан взаимодействия возьмем в виде (3.63). Можно показать, что условиям регулярности в центре (3.13) можно удовлетворить, только если функ-

ция $\Psi(\psi)$ обращается в бесконечность при некотором конечном ψ . Выберем, например, с учетом условия $\Psi(0) = 0$

$$\Psi(\psi) = \sin^2 B\psi_0 / \sin^2 B(\psi - \psi_0); \quad B, \psi_0 = \text{const.} \quad (3.70)$$

Тогда можно получить частное решение уравнений (3.68), (3.69), удовлетворяющее граничным условиям (3.12), (3.13):

$$\exp(-\gamma) = \frac{1 - \delta^2 \exp(-b\xi)}{1 - \delta^2}; \quad \psi = \psi_0 - B^{-1} \arcsin(\delta \exp(-b\xi/2)), \quad (3.71)$$

где все постоянные выражаются через заряд q , массу m и гравитационную постоянную G :

$$B = \sqrt{\pi G}/c^2; \quad \delta = \sqrt{G} m/|q|; \quad \sin B\psi_0 = \delta; \\ b = r_{\text{кл}} (1 - \delta^2) = (q^2/mc^2) (1 - \delta^2),$$

причем $\delta < 1$ и ψ меняется в пределах от 0 до ψ_0 .

При $\delta \ll 1$ (для реальных частиц $\delta \sim 10^{-20}$) пространство-время является плоским с точностью до δ^2 [см. (3.71)], а координата ξ с той же точностью равна $1/r$, где r — обычный радиус сферы. В этом приближении эффективная плотность материи $\rho_m = T_0^0/c^2$ и эффективный заряд Q внутри сферы радиуса r определяются формулами

$$\rho_m = q^2 \exp(-r_{\text{кл}}/r)/4\pi c^2 r^4; \quad Q = q \exp(-r_{\text{кл}}/r).$$

Отношение эффективной плотности заряда к ρ_m постоянно и равно q/m . Обе плотности в центре равны нулю и максимальны при $r = r_{\text{кл}}/4$, что воспроизводит основные черты распределения массы и заряда протона, полученные экспериментально [103].

В силу регулярности данного решения в нем заведомо совпадают инертная и гравитационная массы. Отметим, что решение существует только для $m < \sqrt{G}|q|$, т. е. $m < 1,8 \cdot 10^{-6}$ г (порядка планковской массы), если q — заряд электрона.

Глава 4

КВАНТОВАЯ КОСМОЛОГИЯ

4.1. ПРОБЛЕМЫ КВАНТОВОЙ КОСМОЛОГИИ [104]

Вопросы квантовой космологии, т. е. квантования космологических моделей, стали привлекать к себе внимание после опубликования работы де Витта [105], в которой была рассмотрена задача о квантовании фридмановской космологической модели с пылью. Здесь мы опишем направление этих исследований, их результаты, возникшие трудности и наметим наиболее интересные, на наш взгляд, нерешенные задачи. Квантовая космология занимает промежуточное положение между различными подходами к объединению теории гравитации с квантовой физикой, а именно между квантованием различных физических полей в заданном классическом гравитационном фоне и квантованием гравитационного поля. От первого подхода она отличается тем,

что производится квантование не только других (по отношению к гравитационному) полей, но и простейших вариантов гравитационного, а именно космологического поля, причем в самосогласованной схеме. По сравнению со вторым подходом это более простая задача, так как рассматривается лишь конечное число степеней свободы гравитационного поля, и фактически квантовополевая задача сводится к квантовой механической. Отсюда и преимущество — возможность решить задачу как на классическом, так и на квантовом уровнях. Конечно, к результатам квантовой космологии необходимо относиться с известной осторожностью, так как они в отличие от данных, полученных при классическом подходе, не являются точными результатами полной квантовой теории гравитации. Действительно, в тех степенях свободы, которые подавлены, должны быть вакуумные флуктуации, иными словами, для координат и импульсов этих степеней свободы нарушается соотношение неопределенностей Гейзенберга. Однако, возможно, какие-то черты квантования космологических моделей останутся и в полной квантовой теории гравитации, и мы сможем найти пути объединения явлений микро- и макромира.

В квантовой космологии существуют физические, методические и чисто технические проблемы. К физическим относится проблема сингулярного состояния космологических моделей. Другая проблема, тоже физического характера, выходящая, строго говоря, за рамки космологии, связана с явлением гравитационного замыкания коллапсирующего тела.

К методическим и техническим относятся такие проблемы, как расстановка некоммутирующих операторов в гамильтониане космологической модели; сравнение различных методов, связанных с использованием равного нулю и отличного от нуля гамильтонианов; вывод соотношения неопределенностей Гейзенберга; физическая интерпретация волновой функции, описывающей квантовое состояние космологической модели; разумный критерий наличия коллапса в квантовой теории; зависимость результатов квантовой теории от выбора канонических переменных, исключаемых из уравнений связи, от наложенных координатных условий и т. п.

4.2. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИРАКА И АДМ НА ПРИМЕРЕ КВАНТОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Остановимся на некоторых вопросах методического характера. В квантовой космологии используется квантовая механика динамических систем со связями. Дирак [106], а также Арновитт, Дезер и Мизнер (АДМ) [68] разработали методы канонического квантования таких динамических систем.

Метод Дирака, в основе которого лежит непосредственное рассмотрение уравнений связей, приводит к уравнению типа уравнения Клейна—Гордона для волновой Ψ -функции, описывающей квантовое состояние системы.

Метод АДМ предусматривает еще до квантования исключение лишних динамических переменных выбором координатных условий и ре-

шением уравнений связей. При этом для Ψ -функции получается уравнение типа уравнения Шредингера с гамильтонианом в виде, например, квадратного корня из дифференциального оператора.

Сравним методы Дирака и АДМ на примере квантования системы лучей в оптически-неоднородной среде [107]. Эта система имеет некоторое сходство с системой геодезических в ОТО. Для лучей квантование методами Дирака и АДМ проводится до конца, при этом решаются проблемы о расстановке операторов, физической интерпретации Ψ -функции, определении гамильтониана в виде квадратного корня из дифференциального оператора.

Уравнения геометрической оптики следуют из вариационного принципа Ферма с действием

$$S = \int n(x_1, x_2, x_3) \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} dt. \quad (4.1)$$

Здесь x_i ($i = 1, 2, 3$) — декартовы координаты точки пространства; $n(x_1, x_2, x_3)$ — показатель преломления среды; t — параметр вдоль траектории луча; точка означает производную по t .

Лагранжиан $L(x, \dot{x})$, соответствующий интегралу действия (4.1), является однородной функцией первого порядка от обобщенных скоростей $\dot{x}_i$. Для такого лагранжиана обычный гамильтониан $H = p_i \dot{x}_i - L$ равен нулю, а импульсные переменные $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$ удовлетворяют уравнению первичных связей

$$\Phi(x, p) \equiv p^2 - n^2 = 0. \quad (4.2)$$

Других первичных, а также вторичных связей для системы лучей не существует. Уравнение связей (4.2) и уравнение движения для некоторой функции динамических переменных x_i, p_i с полным гамильтонианом H_T , равным $H_T = u\Phi$, где u — произвольная функция параметра t , дают описание системы лучей методом Дирака в классическом случае.

Согласно методу АДМ интеграл действия (4.1) можно представить в каноническом виде и варьировать с учетом уравнения связей (4.2). Решая это уравнение относительно p_1 и используя координатное условие $t = x_1$, приходим к двум значениям действия

$$S^\pm = \int (p_2 x_2' - p_3 x_3' - H_1^\pm) dx_1, \quad (4.3)$$

где штрих означает производную по x_1 . Значения отличного от нуля гамильтониана равны

$$H_1^\pm = \pm \sqrt{n^2 - p_2^2 - p_3^2}. \quad (4.4)$$

Таким образом, метод АДМ приводит к разбиению траектории луча на части с положительным и отрицательным гамильтонианами H_1^+ и H_1^- . При этом часть траектории с H_1^+ направлена наклонно в отрицательном направлении оси x_1 ($p_1 < 0$), а часть траектории с H_1^- — в положительном направлении оси x_1 ($p_1 > 0$). Точки траекторий, разделяющие части H_1^+ и H_1^- , являются особыми в методе АДМ при наложенном координатном условии и называются точками поворота луча. Тра-

ектория луча в точках поворота направлена перпендикулярно оси x_1 ($p_1 = 0$).

В квантовом подходе импульсные переменные p_i заменяются операторами $\hat{p}_i$, которые в координатном представлении имеют вид:

$$\hat{p}_j = - (i/k_0) \partial/\partial x_j. \quad (4.5)$$

Здесь вместо обычно выступающей постоянной Планка $\hbar$ стоит обратная величина некоторого постоянного значения k_0 волнового числа. Если Ψ — волновая функция квантового состояния лучей, то уравнение связей (4.2) в методе Дирака в квантовом подходе записывается как волновое уравнение Гельмгольца вида

$$(\Delta + k_0^2 n^2) \psi = 0. \quad (4.6)$$

Для уравнения (4.6) можно поставить краевую задачу о рассеянии волн с условиями излучения на бесконечности. При этом физическая интерпретация волновой функции не вызывает затруднений и дается с помощью вектора плотности потока, удовлетворяющего уравнению непрерывности.

Рассмотрим случай плоскослоистой среды, когда показатель преломления зависит только от одной координаты x_1 , т. е. $n = n(x_1)$. При этом в представлении Фурье

$$\psi(x_1, x_\perp) = \int \exp(i k_\perp x_\perp) d^2 k_\perp \tilde{\psi}(x_1, k_\perp) \quad (4.7)$$

по поперечным координатам $x_\perp = (x_2, x_3)$ уравнение Гельмгольца (4.6) сводится к одномерному волновому уравнению

$$\partial^2 \tilde{\psi} / \partial x_1^2 + \kappa^2(x_1, k_\perp) \tilde{\psi} = 0. \quad (4.8)$$

Здесь $\kappa(x_1, k_\perp)$ обозначено переменное «продольное» волновое число:

$$\kappa = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 n^2 - k_\perp^2}, & k_\perp < k_0 n; \\ i \sqrt{k_\perp^2 - k_0^2 n^2}, & k_\perp > k_0 n. \end{cases} \quad (4.9)$$

Оно вещественно в классически доступной области $k_\perp < k_0 n$ и чисто мнимо в классически запрещенной области $k_\perp > k_0 n$.

Согласно методу АДМ при квантовании системы лучей следует исходить из (4.4). Обозначая $p_1 = -H_1^\pm$ и заменяя импульсы p_i операторами (4.5), приходим к двум независимым уравнениям

$$(i/k_0) \partial \psi^\pm / \partial x_1 = \pm \sqrt{n^2 + \Delta_\perp / k_0^2} \psi^\pm. \quad (4.10)$$

Каждое из них можно рассматривать как уравнение Шредингера с гамильтонианом в виде квадратного корня из дифференциального оператора с переменным неоднородным членом, равным квадрату показателя преломления, причем роль времени играет координата.

Для плоскослоистой среды квадратный корень из дифференциального оператора в правых частях уравнений Шредингера (4.10) можно определить с помощью преобразования Фурье (4.7):

$$\sqrt{k_0^2 n^2 + \Delta_\perp} \psi^\pm(x, x_\perp) = \int \exp(i k_\perp x_\perp) d^2 k_\perp \kappa(x_1, k_\perp) \tilde{\psi}^\pm(x_1, k_\perp). \quad (4.11)$$

Здесь переменная продольная составляющая волнового числа $\kappa(x_1, k_\perp)$ удовлетворяет (4.9). С учетом (4.11) уравнения Шредингера (4.10) в представлении Фурье решаются точно, и их решения в этом представлении имеют вид бегущих волн

$$\tilde{\psi}^\pm(x_1, k_\perp) = C^\pm(k_\perp) \exp[\mp i \int \kappa(x_1, k_\perp) dx_1] \quad (4.12)$$

с постоянными амплитудами $C^\pm(k_\perp)$.

Сравним результаты квантования системы лучей по методам Дирака и АДМ. Легко видеть, что решения в виде бегущих волн (4.12), вообще говоря, не удовлетворяют волновому уравнению (4.8). Но их можно получить приближенным решением волнового уравнения (4.8) методом ВКБ; причем в том варианте этого метода, в котором не учитывается эффект изменения интенсивности волны вследствие пространственного расхождения или сближения лучей.

Как видно, в данном случае квантование по методу АДМ можно рассматривать в качестве ВКБ-приближения к методу квантования по Дираку.

4.3. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПРИ КВАНТОВАНИИ ФРИДМАНОВСКОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Вывод соотношения неопределенностей Гейзенберга для канонически-сопряженных переменных интересен прежде всего для исследования проблемы сингулярного состояния в космологических моделях. Выведем соотношение неопределенностей для фридмановской космологической модели с пылью [108].

Метрика фридмановской закрытой космологической модели в сопутствующей системе отсчета имеет вид:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (4.13)$$

Масштабный фактор $a(\tau)$ модели удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$(3\pi c^2/4G) (a\dot{a}^2 + c^2 a) = Mc^2, \quad (4.14)$$

где M — полная масса пыли; точка означает производную по собственному времени τ .

Де Витт предложил следующее волновое уравнение для вектора $\Phi = \Phi(x)$ квантового состояния модели:

$$(-d^2/dx^2 + \pi^2 x^{2/3}) \Phi = (4\pi/3) (E/m_L c^2) \Phi. \quad (4.15)$$

Здесь $E = Mc^2$ — собственная энергия пыли; $x = (a/L)^{3/2}$.

Волновое уравнение (4.15) рассматривается в гильбертовом пространстве $L_2(0, \infty)$ на полуоси $x \geq 0$ с нормой

$$\int_0^\infty |\Phi(x)|^2 dx = 1$$

и нулевым граничным условием

$$\Phi(0) = 0. \quad (4.16)$$

При этом условии оператор, стоящий в левой части уравнения (4.15), является самосопряженным в пространстве $L_2(0, \infty)$ [109].

Обозначим $\hat{p} = -i\hbar/dx$ оператор импульса, канонически-сопряженный переменной x и связанный с ней коммутационным соотношением

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar. \quad (4.17)$$

Из этого соотношения с помощью известных формальных преобразований (см., например, [110]) выводится соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle \geq \hbar^2/4. \quad (4.18)$$

Заметим, что оператор $\hat{p}$, определенный на функциях с нулевым граничным условием (4.16), эрмитов (симметрический), но не самосопряженный [111]. Однако для вывода соотношения неопределенностей (4.18) на функциях $\Phi(x)$ с нулевым граничным условием (4.16) достаточно эрмитовости оператора $\hat{p}$. Из соотношения (4.18) следует неравенство для среднего по квантовому ансамблю объема закрытой фридмановской модели

$$\langle a^3 \rangle \geq (3/16\pi) L^3 m_L / \langle M \rangle. \quad (4.19)$$

Если в правой части (4.19) положить $\langle M \rangle = m_L = 10^{-5}$ г (планковская масса), то получим

$$\langle a^2 \rangle^{1/3} \geq 0,4L,$$

где $L \sim 10^{-33}$ см (размер планкеона). Только при $M \rightarrow \infty$ $\langle a^3 \rangle^{1/3} \rightarrow 0$.

4.4. КВАНТОВАНИЕ ФРИДМАНОВСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ, ЗАПОЛНЕННОЙ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ [8, 104]

Обратимся к вопросам, связанным с другими физическими проблемами квантовой космологии. Остановимся на одном из подходов к исследованию проблемы сингулярного состояния на примере фридмановской модели с материей в виде скалярного поля. Этот пример, представляющий самостоятельный физический интерес, впервые исследовался в [8] (конформное скалярное поле с членом $R/6$) и [112] (скалярное поле с минимальной связью). Рассмотрение материи в виде скалярного поля более корректно, чем рассмотрение пылевидного вещества, так как вблизи сингулярности, как будет показано ниже, приближение с пылью несправедливо.

Начнем с классического анализа системы скалярного и гравитационного полей в закрытой изотропной модели. Ограничимся рассмотрением свободного скалярного поля. Для его описания в искривленном пространстве будем использовать уравнение Пенроуза—Тагирова—Черникова (ПТЧ) [63]:

$$(\square + m^2 c^2 / \hbar^2 + R/6) \psi = 0, \quad (4.20)$$

где $\square = -\nabla^\alpha \nabla_\alpha$ — общековариантный оператор Даламбера; R — скалярная кривизна.

Рассмотрим систему с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{m^2 c^3}{2\hbar} \left[\psi_\sigma^* \psi^\sigma + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{R}{6} \right) \psi \psi^* \right] + \frac{c^2}{2\kappa} R, \quad (4.21)$$

где ψ^* — комплексно-сопряженное поле; $\kappa = 8\pi G/c^2$ — эйнштейновская гравитационная постоянная.

Будем пользоваться метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ с сигнатурой $(-+++)$. Варьируя интеграл действия

$$S = \frac{1}{c} \int V \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x \quad (4.22)$$

по ψ и $g^{\mu\nu}$, получаем соответственно уравнение скалярного поля и уравнения Эйнштейна

$$R_\mu^\nu - (R/2) \delta_\mu^\nu = -(\kappa/c^2) T_\mu^\nu, \quad (4.23)$$

где

$$T_\mu^\nu = \frac{m^2 c^3}{2\hbar} \left\{ -(\psi_\mu^* \psi^\nu + \psi^{*\nu} \psi_\mu) + \delta_\mu^\nu \left[\psi_\sigma^* \psi^\sigma + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{R}{6} \right) \psi \psi^* \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} (R_\mu^\nu - \nabla_\mu \nabla^\nu + \delta_\mu^\nu \square) \psi \psi^* \right\} \quad (4.24)$$

— тензор энергии-импульса материи (скалярного поля), обладающий свойствами

$$\nabla_\sigma T_\mu^\sigma = 0; \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}; \quad T \equiv T_\mu^\mu = (m^4 c^5 / \hbar^3) \psi \psi^*. \quad (4.25)$$

Метрика закрытой фридмановской Вселенной имеет вид:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d^3\Omega, \quad (4.26)$$

где $a(t)$ — радиус Вселенной, а

$$d^3\Omega = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.27)$$

представляет собой элемент поверхности 3-сферы единичного радиуса.

Если волновая функция скалярного поля ψ зависит только от времени t , т. е. $\psi = \psi(t)$, то тензор энергии-импульса скалярного поля в искривленном пространстве диагонален и имеет следующие отличные от нуля компоненты:

$$\left. \begin{aligned} T_0^0 &= \frac{m^2 c}{2\hbar} \left[\dot{\psi} \dot{\psi}^* + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \psi \psi^* + \omega^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{a^2} \right) \psi \psi^* \right]; \\ T_1^1 &= T_2^2 = T_3^3 = \frac{m^2 c}{2\hbar} \left[-\frac{1}{3} \left(\dot{\psi} \dot{\psi}^* + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \psi \psi^* \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2}{3} \left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2} \right) \psi \psi^* \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

где λ — комптоновская длина волны; $\omega = mc^2/\hbar$ — комптоновская частота.

Самосогласованная система уравнений (4.20), (4.23) для радиуса Вселенной $a(t)$ и скалярного поля $\psi(t)$ примет в рассматриваемой метрике вид:

$$-(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + c^2)/a^2c^2 = -(\kappa/c^2) T_1^1; \quad (4.29)$$

$$-3(\dot{a}^2 + c^2)/a^2c^2 = -(\kappa/c^2) T_0^0; \quad (4.30)$$

$$\ddot{\psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} + \left(\omega^2 + \frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + c^2}{a^2}\right)\psi = 0. \quad (4.31)$$

В системе уравнений (4.29)—(4.31) неизвестны радиус Вселенной и волновая функция скалярного поля $\psi(t)$. Ввиду сложности этой системы рассмотрим два предельных случая, допускающих приближенное решение.

Нерелятивистское приближение. Исследуем систему уравнений (5.29)—(5.31) в интервале времени, в котором радиус Вселенной — медленно меняющаяся функция в масштабе комптоновской частоты:

$$|\dot{a}|/a \ll \omega \quad (m \neq 0). \quad (4.32)$$

Тогда можно совершить предельный переход от релятивистского уравнения ПТЧ (4.31) к нерелятивистскому уравнению Шредингера. Решение уравнения (4.31) ищем в виде

$$\psi(t) = f(t) \exp(i\omega t), \quad (4.33)$$

где $f(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда. Подстановка (4.33) в (4.31) дает уравнение для $f(t)$:

$$\ddot{f} + 2i\omega\dot{f} - \omega^2f + 3(\dot{a}/a)(\dot{f} + i\omega f) + f\omega^2(1 + \lambda^2/a^2) + f(a\ddot{a} + \dot{a}^2)/a^2 = 0, \quad (4.34)$$

где главными являются второй и пятый члены. Опуская члены более высокого порядка малости, приходим к приближенному интегралу движения

$$f^2a^3 \approx \text{const} = \lambda^3 N/2\pi^2, \quad (4.35)$$

который имеет простой физический смысл: полное число скалярных частиц N в объеме Вселенной $2\pi^2a^3$, радиус которой a измерен в единицах λ , сохраняется во времени. При этом квадрат амплитуды $f^2(t)$ пропорционален плотности числа частиц. Таким образом, в этом приближении отсутствует рождение частиц во Вселенной.

Подставим найденное приближенное решение уравнения ПТЧ в выражение (4.28) для тензора энергии-импульса скалярного поля. В этом приближении получим:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 \approx 0; \quad T_0^0 \approx Nmc^2/2\pi^2a^3. \quad (4.36)$$

Если пространственные компоненты T_1^1 , T_2^2 , T_3^3 тензора энергии-импульса интерпретировать как давление с обратным знаком, т. е. $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p$, а временную компоненту T_0^0 — как плотность энергии ϵ , т. е. $T_0^0 = \epsilon$, то приближенные соотношения (4.36) соответствуют уравнению состояния пылевидной материи.

Конкретизируем условие нерелятивистского приближения. Для этого воспользуемся известным решением уравнений Эйнштейна для пылевидной материи:

$$a(\eta) = a_0 (1 - \cos \eta); \quad (4.37)$$

$$ct = a_0 (\eta - \sin \eta), \quad (4.38)$$

где $a_0 = 2GM/3\pi c^2$. Согласно (4.37) радиус Вселенной a изменяется со временем t периодически от нуля до максимального значения, которое удобно представить в виде

$$2a_0 = 2(2/3\pi) (Nm/m_L) L. \quad (4.39)$$

Чтобы удовлетворить условию нерелятивистского приближения в выражении (4.32), достаточно, как это следует из (3.37), выполнения неравенства

$$2a_0 c^2 / a^3 \ll \omega^2. \quad (4.40)$$

Учитывая выражение (4.38), получаем ограничение на радиус Вселенной a :

$$a \gg \lambda, \quad (4.41)$$

а на число частиц:

$$N \gg (m_L/m)^2. \quad (4.42)$$

Интересно, что, например, для параметров элементарных частиц $\lambda \sim 10^{-13}$ см, $m \sim 10^{-24}$ г в этом случае $a \gg 10^{-13}$ см, $N \gg 10^{40}$.

Из неравенства (4.41) с очевидностью следует вывод: в нерелятивистском приближении радиус Вселенной a должен быть больше комптоновской длины волны λ . В нерелятивистском приближении самосогласованная система со скалярным полем без члена $R/6$ дает те же результаты, так как этот член мал.

Ультрарелятивистское приближение. Рассмотрим уравнение (4.31) в интервале времени t , в котором радиус Вселенной $a \ll \lambda$ и является быстро меняющейся функцией ($|\dot{a}|/a \gg \omega$) в масштабе комптоновской частоты. Если начальный момент $t = 0$ соответствует стягиванию Вселенной в точку, то исследуемый интервал времени отвечает малым значениям t .

Уравнение (4.31) в этом приближении перейдет в следующее:

$$\ddot{\psi} + 3(\dot{a}/a)\dot{\psi} + \psi(\ddot{a} + \dot{a}^2/a^2) = 0. \quad (4.43)$$

Его интеграл имеет вид:

$$a(t)\psi(t) = A \int d\tau/a(\tau) + B \quad (A, B = \text{const}). \quad (4.44)$$

В том же приближении

$$\varepsilon = T_0^0 \approx (m^2 c / 2\hbar) [\dot{\psi}\dot{\psi}^* + (\dot{a}^2/a^2) \psi\psi^*]; \quad (4.45)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 \approx \frac{m^2 c}{2\hbar} \left[-\frac{1}{3} \left(\dot{\psi}\dot{\psi}^* + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \psi\psi^* \right) \right]. \quad (4.46)$$

Введя давление p и плотность энергии ε , получим уравнение состояния $p = \varepsilon/3$, которое соответствует случаю ультрарелятивистского

газа*. Воспользуемся известным решением уравнений Эйнштейна для этого уравнения состояния:

$$a(\eta) = a_1 \sin \eta; \quad ct = \int_0^\eta a(\eta) d\eta = a_1 (1 - \cos \eta). \quad (4.47)$$

При этом согласно (4.44) и (4.47)

$$\psi(t) = At/ca(t) + B/a(t). \quad (4.48)$$

Из уравнений (4.47) и (4.48), а также (4.45) и (4.46) следует, что в рассматриваемом ультрарелятивистском приближении полная энергия скалярного поля $2\pi^2 a^3 T_0^0$ в объеме Вселенной изменяется обратно пропорционально радиусу:

$$2\pi^2 a^3 T_0^0 \approx \text{const}/a. \quad (4.49)$$

Это связано с тем, что в ультрарелятивистском приближении массой мы пренебрегли по сравнению с кривизной, а потому $T \approx 0$, и зависимость $\varepsilon(a)$ должна быть как для излучения, т. е. $\varepsilon \sim a^{-4}$, что отражено в (4.49). В формализме без члена $R/6$ эта зависимость другая, а именно: $2\pi^2 a^3 T_0^0 \approx \text{const}/a^3$. Таким образом, учет члена $R/6$ вносит изменения в решение уравнений и характер зависимости T_0^0 от a в ультрарелятивистском приближении. Подчеркнем, что для безмассового конформного скалярного поля наше ультрарелятивистское решение является точным.

Уравнения Эйнштейна и ПТЧ в форме Гамильтона. Обратимся к общему исследованию системы уравнений (4.29)—(4.31). Уравнение (4.29) имеет второй, а уравнение (4.30) первый порядок относительно производной от радиуса Вселенной по времени.

Нетрудно убедиться, что уравнение Эйнштейна первого порядка (4.30) является первым интегралом движения системы уравнений (4.29)—(4.31), который переходит в уравнение (4.30), если приравнять постоянную интегрирования нулю. Можно, таким образом, не рассматривать уравнение Эйнштейна первого порядка, что весьма облегчает переход к каноническому виду.

Система уравнений (4.28), (4.29), (4.31) допускает представление в форме Лагранжа и Гамильтона. Переход от формализма Лагранжа к формализму Гамильтона осуществляется по обычным правилам классической механики. Принимая за обобщенную координату гравитационного поля (метрики) радиус Вселенной a и за обобщенные координаты скалярного поля q_A ($A = 1, 2$) вещественную и мнимую части его волновой функции

$$q_1 = \text{Re } \psi; \quad q_2 = \text{Im } \psi,$$

получаем для плотности исходного лагранжиана следующее выражение:

*Для скалярного поля, уравнение которого не содержит член $R/6$, получим ультрарелятивистское предельно жесткое уравнение состояния типа $\varepsilon = p$ (см. далее).

$$\mathcal{L} = \frac{m^2 c}{2\hbar} \left[\sum_A \left(\dot{q}_A^2 - \omega^2 q_A^2 - \frac{\ddot{a}a + \dot{a}^2 + c^2}{a^2} q_A^2 \right) \right] + \frac{3(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + c^2)}{\kappa a^2}. \quad (4.50)$$

Следуя обычным правилам, получаем гамильтониан в виде

$$H \equiv \dot{a}p + \sum_A \dot{q}_A p_A - \mathcal{L} = -\frac{3\pi c^4}{4G} a + \sum_A \frac{M}{2\lambda} \left(\omega^2 + \frac{c^2}{a^2} \right) q_A^2 + \\ + \sum_A \frac{\lambda}{2M} p_A^2 - \frac{G}{3\pi c^2 a^3} \left(ap - \sum_A q_A p_A \right)^2, \quad (4.51)$$

где $M = 2\pi^2 a^3 m$ — масса скалярного поля в объеме Вселенной; p — обобщенный импульс гравитационного поля; P_A — обобщенные импульсы скалярного поля.

Уравнения Гамильтона

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \partial H / \partial p; \quad \dot{p} = -\partial H / \partial a; \\ \dot{q}_A &= \partial H / \partial p_A; \quad \dot{p}_A = -\partial H / \partial q_A \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

эквивалентны системе уравнений (4.28), (4.29), (4.31).

Поскольку полный гамильтониан не зависит явно от времени, уравнения Гамильтона допускают существование интеграла энергии:

$$H = H_g + H_m = E = \text{const}. \quad (4.53)$$

Принимая во внимание, что

$$H_m = 2\pi^2 a^3 T_0^0, \quad (4.54)$$

убеждаемся, что интеграл энергии совпадает с (4.30), если положить $E = 0$. Итак, полный гамильтониан гравитационного и скалярного полей равен нулю:

$$H = 0. \quad (4.55)$$

Уравнение (4.55) называют уравнением динамических или гамильтоновых связей.

Квантовое рассмотрение системы скалярного и гравитационного полей в закрытой изотропной модели. Квантовое уравнение гамильтоновых связей. Приведем гамильтониан (4.51) к каноническому виду с помощью канонического преобразования:

$$\left. \begin{aligned} P_A &= q_A p_A; \quad P = (a/L) Lp - q_1 p_1 - q_2 p_2; \\ Q_A &= (a/L) q_A = x_A; \quad Q = (a/L)^{3/2} = x. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Подчиним операторы координат Q , Q_A и соответствующие им обобщенные импульсы P , P_A перестановочным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [Q, P] &= i\hbar; \quad [Q_A, P_B] = i\hbar \delta_{AB}; \\ [Q, P_A] &= [Q_A, P] = [Q, Q_A] = [P, P_A] = 0, \quad A, B = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

В представлении, в котором операторы обобщенных координат Q , Q_A диагональны, операторы импульсов P , P_A имеют вид дифференциальных операторов: $P = -i\hbar \partial / \partial Q$, $P_A = -i\hbar \partial / \partial Q_A$. Они действуют на вектор состояния $\Phi = \Phi(t, Q, Q_A)$ гравитационного и ска-

лярного полей, которому приписывается квантовомеханический смысл амплитуды вероятности.

Запишем для вектора состояния Φ уравнение Шредингера: $i\hbar\partial\Phi/\partial t = H\Phi$. Так как гамильтониан H не зависит явно от времени, подстановкой

$$\Phi(t, Q, Q_A) = \exp[(iE/\hbar)t] \Phi(Q, Q_A)$$

получим уравнение Шредингера, не зависящее от времени: $H\Phi = E\Phi$. В соответствии со сказанным выше нужно положить $E = 0$; тогда придем к квантовому уравнению гамильтоновых связей $H\Phi = 0$. При этом некоммутирующие операторы Π, Q, Π_A, Q_A расставим, как предложил де Витт, так, чтобы соответствующие им дифференциальные части превратились в одномерные операторы Лапласа—Бельтрами. В результате квантовое уравнение гамильтоновых связей примет вид:

$$H(x, x_A)\Phi = m_L c^2 \left[-\frac{3\pi}{4} x^{2/3} + \frac{3}{4\pi} \Delta + \pi^2 v^2 x^{2/3} (v^2 + x^{4/3})(x_1^2 + x_2^2) - \frac{v^{-2} x^{-2/3}}{4\pi^2} (\Delta_1 + \Delta_2) \right] \Phi = 0, \quad v = m/m_L. \quad (4.58)$$

Перепишем его следующим образом:

$$D\Phi = (4\pi/3)\mathcal{H}_m\Phi, \quad (4.59)$$

где $D = -\Delta + \pi^2 x^{2/3}$ (Δ — оператор Лапласа);

$$\mathcal{H}_m = \sum_{A=1,2} \left[-\frac{v^{-2} x^{-2/3}}{4\pi^2} \Delta_A + \pi^2 v^2 x^{2/3} (v^2 + x^{-4/3}) \right].$$

Уравнение (4.59) является уравнением гиперболического типа в частных производных второго порядка. Интересно его решение, приводящее к нормированному вектору состояния гравитационного и скалярного полей Φ : $\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dx_1 dx_2 |\Phi(x, x_A)|^2 < \infty$. Из условия нормировки следует, что вектор состояния $\Phi(x, x_A)$ должен достаточно быстро убывать на бесконечности $x \rightarrow \infty$, а также при $x_A \rightarrow \infty$.

В уравнении (4.59) переменные не разделяются. Это значительно осложняет получение точного решения поставленной краевой задачи, поэтому ограничимся его приближенным решением. Как и в классическом случае, рассмотрим два предела: нерелятивистский и ультрарелятивистский. В этих пределах переменные в уравнении (4.59) допускают приближенное разделение.

Нерелятивистское приближение. В нерелятивистском пределе переменная x принимает большие значения. Уравнение (4.59) можно решить методом, известным в квантовой механике под названием *метод быстрой и медленной подсистем*, причем за быструю подсистему принимают скалярное поле, за медленную — гравитационное.

Рассмотрим гамильтониан скалярного поля $\mathcal{H}_m$ при фиксированном значении переменной x . Обозначим $\Phi_N^{(m)}(x, x_A)$ и $\epsilon_N^{(m)}$ его собствен-

ные функции и собственные значения соответственно:

$$\mathcal{H}_m \Phi_N^{(m)} = \varepsilon_N^{(m)} \Phi_N^{(m)},$$

где $\varepsilon_N^{(m)} = v(N_1 + N_2 + 1)$; $N = \{N_1, N_2\}$.

Решение уравнения (4.59) найдем в виде разложения

$$\Phi(x, x_A) = \sum_N \Phi_N^{(g)}(x) \Phi_N^{(m)}(x, x_A). \quad (4.60)$$

Подставляя выражение (4.60) в уравнение (4.59), для коэффициентов разложения получаем систему уравнений

$$(D - \varepsilon_N^{(m)}) \Phi_N^{(g)} = - \sum_{N'} (\Phi_N^{(m)} / [D, \Phi_{N'}^{(m)}] \Phi_{N'}^{(g)})_x, \quad (4.61)$$

где $(\Phi_1 / \Phi_2)_x$ обозначено скалярное произведение в пространстве функций от переменных x_A ; $[D, \Phi_{N'}^{(m)}]$ — коммутатор.

Правые части (4.61) содержат производные первого и второго порядка от функций $\Phi_N^{(m)}$ по x . Эти производные дают члены, по порядку величины пропорциональные x^{-1} и x^{-2} . Если значение x достаточно велико, то правые части уравнений (4.61) можно считать равными нулю, после чего получим уже независимые между собой уравнения $D\Phi_N^{(g)} = \varepsilon_N^{(m)} \Phi_N^{(g)}$. Уравнение такого вида исследовал де Витт. Формально оно описывает квантовомеханическое движение в потенциальной яме, ограниченной бесконечной стенкой при $x = 0$ и потенциалом, пропорциональным $x^{2/3}$ при $x > 0$. Квазиклассические собственные значения

$$\varepsilon_n^{(g)} = (4/3) \pi \sqrt{6(n + 3/4)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Собственные функции $\Phi_n^{(g)}(x)$ экспоненциально затухают за точкой поворота x_n , хотя отличны от нуля при любом a . Точке поворота отвечает радиус поворота a_n , для которого $a_n/L = x_n^{2/3} = \varepsilon_n^{(g)}/\pi^2$. Отметим, что в формализме без члена $R/6$ в нерелятивистском приближении и в квантовом подходе получаются эти же результаты [112]. Условие применимости нерелятивистского квантового приближения дает

$$N^2/x^2 \ll \varepsilon_N^{(m)}; \quad L^3 N^3 \ll \varepsilon_N^{(m)} a^3.$$

Из этих неравенств для радиуса a и числа скалярных частиц N получаются те же самые ограничения, что и в нерелятивистском классическом приближении. Однако в отличие от классического в квантовом подходе ψ -функция отлична от нуля при любых a , хотя и мала за точкой поворота; поэтому в квантовом подходе понятие закрытой модели носит условный характер.

Ультрарелятивистское приближение. В ультрарелятивистском пределе $x \rightarrow 0$. Уравнение (4.61) при этом имеет вид:

$$-x^{2/3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{3} \sum_A \left(-\frac{v^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x_A^2} + \pi^2 v^2 x_A^2 \right) \Phi. \quad (4.62)$$

В уравнении (4.62) переменные разделяются:

$$d^2 U_A / dx_A^2 + (B_A - 4\pi^4 v^4 x_A^2) U_A = 0, \quad A = 1, 2; \quad (4.63)$$

$$d^2 U / dx^2 + (v^{-2}/3\pi) (B_1 + B_2) x^{-2/3} U = 0; \quad (4.64)$$

$$\Phi = U(x) U_1(x_1) U_2(x_2). \quad (4.65)$$

Как видно, (4.63) — выражение типа уравнения Шредингера для одномерного осциллятора. Таким образом, для него решение можно выписать непосредственно:

$$U_{A, n_A}(x_A) = \frac{\exp(-\pi^2 v^2 x_A^2) H_{n_A}(\sqrt{2} \pi v x_A)}{\sqrt{2^{n_A} n_A!} \sqrt{\pi} / \sqrt{2} \pi v};$$

$$B_{A, n_A} = 4\pi^2 v^2 (n_A + 1/2),$$

где H_{n_A} — функция Ханкеля. Уравнение (4.64) имеет решение

$$U(x) = \sqrt{x} K_{i3/4} \left(\left[\frac{4\pi v^{-2}}{2} (n_1 + n_2 + 1) \right]^{4/9} x^{2/3} \right),$$

где K — функция Макдональда. Проанализируем это решение с точки зрения физического смысла. При $x \rightarrow 0$ имеем $K_{i3/4}(\dots) \sim x^{-i3/4}$, так что $|K_{i3/4}|^2 \approx 1$ и, следовательно,

$$|\Phi(x, x_A)|^2 \sim x. \quad (4.66)$$

Отсюда следует, что вероятность такого состояния, когда Вселенная сжимается в точку, равна нулю. Отметим, что этот результат имеет чисто квантовое происхождение, ибо $x = (a/L)^{3/2} \sim (a/\hbar^{1/2})^{2/2}$.

При $x \rightarrow \infty$ аналогично найдем

$$|\Phi(x, x_A)|^2 \sim x^{1/3} \exp(-2\alpha x^{2/3}), \quad (4.67)$$

где α — постоянная. Таким образом, квадрат модуля вектора состояния экспоненциально убывает вне области $\alpha > L \sim 10^{-33}$ см. Согласно выражениям (4.66) и (4.67) вектор состояния $\Phi(x, x_A)$ допускает нормировку по переменной x .

Обозначим энергию скалярного поля E_m . В рассматриваемом ультрарелятивистском пределе при фиксированном значении переменной x энергию E_m можно определить как собственное значение гамильтониана $\mathcal{H}_m$, полагая $\mathcal{H}_m \Phi = E_m \Phi$. Это дает

$$E_{n_1 n_2} = \frac{4\pi}{3} \frac{v^{-2}}{4\pi^2} \frac{n_1 + n_2 + 1}{x^{2/3}} m_L c^2.$$

Так как $x^{2/3} \sim a$, данная формула качественно совпадает с классической формулой (4.49).

Если в классической задаче радиус a и переменная x — детерминированные величины, то в квантовой задаче они — случайные величины. Среднее значение $\langle E_{m, n} \rangle_x$ энергии скалярного поля по вероятности распределения переменной x при фиксированных значениях x_A равно

$$\langle E_{m, n} \rangle = \int_0^\infty dx E_{m, n} |\Phi(x, x_A)|^2 = \text{const} \int_0^\infty |\Phi|^2 dx / x^{2/3}. \quad (4.68)$$

Этот интеграл сходится как при $x \rightarrow \infty$ [см. (4.67)], так и при $x = 0$, поэтому энергия скалярного поля конечна.

Ультрарелятивистское квантовое приближение в формализме без члена $R/6$ [112]. Квантовое уравнение гамильтоновых связей в этом случае тоже имеет вид (4.59), однако под операторами D и $\mathcal{H}_m$ следует понимать

$$D = -\partial^2/\partial x^2 + \pi^2 x^{2/3}; \quad (4.69)$$

$$\mathcal{H}_m \equiv \frac{H_m}{m_L c^2} = \sum_A \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_A^2} + \frac{1}{2} \mu v^2 x_A^2 \right); \quad (4.70)$$

μ и v — безразмерные эффективная масса и частота:

$$\mu = 2\pi^2 v^2 x^2; \quad v = m/m_L. \quad (4.71)$$

Потенциальная энергия $(1/2)\mu v^2 x_A^2$ эффективного осциллятора ($A = 1, 2$) скалярного поля в выражении для его гамильтониана $\mathcal{H}_m$, пропорциональная малой величине x^2 , представляет собой медленно меняющуюся пологую функцию от x_A . Вдали от точек поворота потенциальная энергия скалярного поля несущественна, и ею можно пренебречь. После этого уравнение (4.59) принимает вид:

$$x^2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \pi^2 x^{2/3} \right) \Phi = -\frac{4\pi}{3} \sum_A \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi^2 v^2} \frac{\partial^2}{\partial x_A^2} \Phi. \quad (4.72)$$

В уравнении (4.72) переменные разделяются. Его решение, убывающее при $x \rightarrow \infty$, с точностью до нормировочной постоянной равно

$$\Phi(x_1, x_2, x) = \sqrt{x} K_{i\tau} \left(\frac{3\pi}{4} x^{4/3} \right) \exp [\pm i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)], \quad (4.73)$$

где α_1, α_2 — постоянные интегрирования; $K_{i\tau}$ — функция Макдональда с мнимым индексом $i\tau$:

$$\tau = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_0^2} - 1}, \quad \alpha_0 = \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{1/2} \frac{m}{m_L}.$$

Проанализируем физический смысл решения уравнения (4.73). При $x \rightarrow 0$ квадрат модуля $|\Phi(x, x_A)|^2$ вектора состояния стремится к нулю как

$$|\Phi(x, x_1, x_2)|^2 \sim \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_0^2}}, & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 < \alpha_0^2; \\ x, & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > \alpha_0^2. \end{cases} \quad (4.74)$$

Как и в случае уравнения скалярного поля с членом $R/6$, вероятность такого состояния, при котором Вселенная сжимается в точку, равна нулю. Этот результат имеет квантовое происхождение, так

как параметр α_0^2 обратно пропорционален постоянной Планка, $\alpha_0^2 \sim \hbar^{-1}$, и при $\hbar \rightarrow 0$ обращается в бесконечность.

При $x \rightarrow \infty$ квадрат модуля вектора состояния экспоненциально убывает:

$$|\Phi(x, x_A)|^2 \sim x^{-1/3} \exp[-(3\pi/2) x^{4/3}].$$

Вектор состояния $\Phi(x, x_A)$ допускает нормировку по переменной x .

Выясним физический смысл параметров α_1 и α_2 ; для этого определим энергию скалярного поля E_m :

$$\mathcal{H}_m \Phi = E_m \Phi; \quad E_m = \frac{3}{16\pi} \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_0^2} \frac{1}{x^2} m_L c^2.$$

Так как $x^2 \sim a^3$, формула для E_m качественно совпадает с классической формулой в ультрарелятивистском приближении без члена $R/6$.

Среднее значение $\langle E_m \rangle_{x_A}$ энергии скалярного поля по вероятности распределения переменной x при фиксированных значениях переменных x_1 и x_2 равно

$$\begin{aligned} \langle E_m \rangle_{x_A} &= \int_0^\infty E_m |\Phi(x, x_A)|^2 dx = \frac{3}{16\pi} \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_0^2} m_L c^2 \times \\ &\times \int_0^\infty |\Phi(x, x_A)|^2 \frac{dx}{x^2}. \end{aligned}$$

Учитывая уравнение (4.74), при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > \alpha_0^2$ получаем, что этот интеграл логарифмически расходится на нижнем пределе: $x = 0$.

Решения квантового уравнения (4.59) в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах существенно различны. В нерелятивистском пределе вектор состояния $\Psi(a, q_1, q_2)$ заметно отличен от нуля в области значений a порядка комптоновской длины волны λ , $a \lesssim \lambda$. Полная энергия скалярного поля E_m в объеме Вселенной в m_L/m раз больше планковской энергии $m_L c^2$: $E_m \sim (m_L/m) m_L c^2$. В ультрарелятивистском пределе вектор состояния $\Psi(a, q_1, q_2)$ заметно отличен от нуля в области значений a порядка планковской длины L , $a \lesssim L$. Полная энергия скалярного поля E_m в объеме Вселенной с точностью до логарифмически расходящегося множителя порядка планковской энергии $m_L c^2$.

4.5. КВАНТОВАНИЕ МЕТРИКИ ФРИДМАНА, СШИТОЙ С МЕТРИКОЙ КРУСКАЛА [113]

Вернемся к метрике (4.13) закрытой фридмановской космологической модели с пылью. Она является частным случаем решения уравнений Эйнштейна, найденного Толменом (1934 г.). Решение Толмена описывает гравитационное поле, создаваемое центрально-симметричным распределением пыли в сопутствующей системе отсчета. Рассмотрим такое частное решение Толмена, когда пыль однородно заполняет часть шара $0 \leq \chi \leq \chi_0$. Используем сферическую систему координат

χ, θ, φ . В этом случае метрика пространства-времени внутри сферы совпадает с метрикой космологической модели Фридмана, а вне сферы — с метрикой Крускала, имеющей вид:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \exp \lambda - d\chi^2 - r^2 d^2\Omega. \quad (4.75)$$

Здесь $\lambda = \lambda(\chi, \tau)$ и $r = r(\chi, \tau)$ — функции от χ, τ .

Если ввести новые переменные ρ и T , полагая

$$\left. \begin{aligned} \rho &= (\chi - \chi_1) / \sin^3 \chi_0; \\ T &= (\rho^2 + 1)^{-3/2} \tau / \sin^3 \chi_0; \\ \chi_1 &= \chi_0 - \sin^2 \chi_0 \cos \chi_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

то функции $\exp \lambda$ и r примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \exp \lambda &= 4 (\rho^2 + 1) [a(T) - (3/2) T da(T)/dT]^2; \\ r &= (\rho^2 + 1) a(T) \sin^3 \chi_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

Из условий сшивания следует, что на поверхности материального шара переменная T и функция r имеют значения τ и $r = r_0(\tau) = a(\tau) \sin \chi_0$ соответственно.

Сшитые между собой метрики Фридмана и Крускала описывают явление гравитационного замыкания коллапсирующего материального шара, заполненного пылевидной материей. Интересно преобразование этих метрик из сопутствующей системы отсчета с координатами $\chi, \theta, \varphi, \tau$ в центральную с координатами r, θ, φ, t . При этом преобразовании время по часам бесконечно удаленного наблюдателя для точки на поверхности материального шара, когда его радиус $r_0(\tau)$ стремится к гравитационному радиусу

$$r_g = a_m \sin^3 \chi_0,$$

асимптотически стремится к

$$t \sim (r_g/c) \ln [(r_{0m} - r_g)/(r_0 - r_g)].$$

Здесь $a_m = 4GM/3\pi c^2$ — максимальное значение масштабного фактора $a(\tau)$; $r_{0m} = a_m \sin \chi_0$ — максимальное значение радиуса $r_0(\tau)$ материального шара.

Яркость I светового излучения с поверхности материального шара, испытывающего гравитационное замыкание, асимптотически стремится [114] к $[(r_0 - r_g)/(r_{0m} - r_g)]^4$.

Равенства (4.77) показывают, что метрические коэффициенты сшитых между собой метрик Фридмана (4.13) и Крускала (4.75) выражаются через масштабный фактор $a(\tau)$ фридмановской космологической модели, удовлетворяющий уравнению (4.14). Поэтому, казалось бы, квантование этих сшитых метрик можно свести* к квантованию фридмановской космологической модели, рассмотренному де Виттом [105]. Это соображение использовано в [113] при квазиклассическом квантовании сшитых метрик Фридмана и Крускала.

* На самом деле это совсем не очевидно, так как не ясно, как будут выглядеть формулы (4.77) в квантовом случае.

При квазиклассическом квантовании фридмановской космологической модели записывалось нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\hbar^2}{2m_L} \frac{\partial^2 \Psi(q, \tau)}{\partial q^2} + V(q) \Psi(q, \tau) \quad (4.78)$$

вместо стационарного уравнения (4.15). Кроме того, в отличие от этого уравнения в (4.78) координата $q = L(a/L)^{3/2}$ и потенциал

$$V(q) = (9/8) m_L c^2 (q/L)^{2/3}.$$

Уравнение Шредингера (4.78) описывает движение материальной точки с массой m_L в потенциальном поле $V(q)$ с гамильтонианом

$$H = p^2/2m_L + V(q). \quad (4.79)$$

Для уравнения Шредингера (4.78) ставится задача с заданным значением волновой функции $\Psi(q, 0) = \Psi_0(q)$ в начальный момент $\tau = 0$. В квазиклассическом приближении квантовомеханическое среднее $\langle \hat{\mathcal{L}}(\hat{q}, \hat{p}) \rangle$ некоторой операторной функции $\mathcal{L}(\hat{p}, \hat{q})$ от операторов координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p} = -i\hbar \partial/\partial q$ вычисляется по приближенной формуле [115]

$$\langle \hat{\mathcal{L}}(\hat{p}, \hat{q}) \rangle \approx \int \mathcal{L}\{q(q_0, p_0, \tau); p(q_0, p_0, \tau)\} f_0(q_0, p_0) dq_0 dp_0. \quad (4.80)$$

Здесь $q = q(q_0, p_0, \tau)$, $p = p(q_0, p_0, \tau)$ — классическая траектория динамической системы в фазовом пространстве q, p , выходящая в начальный момент $\tau = 0$ из точки q_0, p_0 ; $f_0(q_0, p_0)$ — начальное значение матрицы плотности динамической системы.

Зададим начальную волновую функцию $\Psi_0(q)$ в виде гауссова волнового пакета

$$\Psi_0(q) = (1/\sqrt{\pi} \sigma) \exp[-(q - \langle q \rangle)^2/2\sigma^2], \quad (4.81)$$

соответствующего состоянию максимального расширения материального шара при классическом рассмотрении его движения, когда

$$\chi_0 = \pi/2 - \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (4.82)$$

В этом случае классическое значение масштабного фактора $a(\tau)$ мало отклоняется от его максимума a_m вплоть до момента гравитационного замыкания материального шара. Дисперсию σ волнового пакета (4.81) определим из условия

$$\langle K \rangle = \hbar \omega, \quad (4.83)$$

где K — кинетическая энергия материальной точки с гамильтонианом H , равным (4.79); ω — частота ее колебаний с энергией, равной $\langle H \rangle$, в потенциальной яме, ограниченной справа потенциальной кривой $V = V(q)$ и в нуле $q = 0$ — бесконечно высокой стенкой. Из (4.83) следует, что

$$\sigma \sim (\langle a_m \rangle / L)^{1/2} L.$$

С помощью матрицы плотности $f_0(q_0, p_0)$, отвечающей волновому пакету (4.81), и формулы (4.80) получаем оценки

$$\left. \begin{aligned} \langle t \rangle &\sim (\langle r_g \rangle / c) \ln (\varepsilon \langle a_m \rangle / L); \\ \langle I \rangle &\sim (\varepsilon \langle a_m \rangle / L)^{-4}. \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

Они говорят о том, что вследствие квазиклассического квантования сшитых между собой метрик Фридмана и Крускала среднее время гравитационного замыкания материального шара по часам бесконечно удаленного наблюдателя и средняя воспринимаемая им яркость $\langle I \rangle$ светового излучения с поверхности этого шара оцениваются конечными значениями. Этот результат подтверждает полученный ранее аналогичный результат (К. П. Станюкович [24, с. 6]) при квантовании интервала в римановом пространстве.

К оценкам (4.84) необходимо сделать одно дополнение. Оно связано с условием применимости квазиклассического приближения к уравнению Шредингера (4.78) в окрестности точки поворота классической траектории при ее «отражении» от потенциала $V(q)$. Из этого условия применимости получаем следующее ограничение снизу на малый параметр в равенстве (4.82):

$$\varepsilon^2 (\langle a_m \rangle / L)^2 \gg 1. \quad (4.85)$$

Сравнение оценок (4.84) с ограничением (4.85) показывает, что среднее время замыкания $\langle t \rangle$ и средняя яркость $\langle I \rangle$ стремятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответственно к логарифмической бесконечности и к нулю.

4.6. О КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ В КВАНТОВОЙ КОСМОЛОГИИ [116]

Опишем квантование пылевидной изотропной космологической модели с космологическим членом методом, аналогичным [105]. Система единиц выбрана таким образом, что $c = \hbar = 16\pi G = 1$. Исходный лагранжиан системы

$$L = L_g + L_m = 12\pi^2 \alpha R - 12\pi^2 \alpha^{-1} R (R_{,0})^2 - 4\pi^2 \alpha \Lambda R^3 + L_m,$$

где R — радиус Вселенной; Λ — космологическая постоянная; — $\alpha^2 = g_{00}$; L_m — лагранжиан материи (для N невзаимодействующих частиц с массой m). Переходя по известным правилам к гамильтониану и используя уравнение связей [105], приходим к условию

$$\mathcal{H}_g + \mathcal{H}_m = 0, \quad (4.86)$$

где $\mathcal{H}_g = -\Pi^2/48R - 12\pi^2 R + 4\pi^2 \Lambda R^3$; $\mathcal{H}_m = Nm$; Π — импульс, сопряженный R . В квантовом случае (4.86) становится условием на вектор состояния: $(\mathcal{H}_g + \mathcal{H}_m) \Psi = 0$. В этом квантовом уравнении связей содержится вся информация о нашей системе. Выбирая порядок сомножителей так, чтобы дифференциальный оператор представлял собой одномерный оператор Лапласа—Бельтрами, в R -представлении получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{48\pi^2} R^{-1/4} \frac{\partial}{\partial R} R^{-1/2} \frac{\partial}{\partial R} R^{-1/4} - 12\pi^2 R + 4\pi^2 \Lambda R^3 + Nm \right) \Psi = 0.$$

Здесь m — оператор массы частицы. Функция Ψ не зависит от α в силу уравнений связей.

Предполагая, что Ψ — собственное состояние оператора m , так что с m можно обращаться как с c -числом, и производя замену $x = R^{3/2}$, $\Phi = R^{-1/4} \Psi$, приходим к уравнению

$$-(3/64\pi^2) \ddot{\Phi} + (12\pi^2 x^{2/3} - 4\pi^2 \lambda x^2) \Phi = Nm\Phi,$$

отличающемся от уравнения де Витта видом потенциала. Налагаем граничное условие де Витта $\Phi(0) = 0$, или $\Psi(0) = 0$. Таким образом, получаем уравнение Шредингера для частицы с массой $32\pi^2/3$, движущейся с энергией Nm в одномерном поле потенциала

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 12\pi^2 x^{2/3} - 4\pi^2 \lambda x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Возможны три значения космологической постоянной: $\Lambda < 0$; $\Lambda = 0$; $\Lambda > 0$.

Случай $\Lambda = 0$ рассмотрен в [105] в приближении ВКБ. При этом получено, что энергия

$$Nm = [48\pi^2 (n + 3/4)]^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Для каждого Nm имеется максимальный радиус Вселенной $R_{\text{макс}}$, вне которого Ψ экспоненциально уменьшается.

При $\Lambda < 0$ тоже имеется предельный радиус Вселенной, причем для малых Nm , т. е. $R_{\text{макс}} \ll (-3/\Lambda)^{1/2}$, получается такое же выражение, как и в случае $\Lambda = 0$. Для больших Nm , т. е. $R_{\text{макс}} \gg (-3/\Lambda)^{1/2}$, как видно из выражения для потенциала, $Nm \sim (n + 3/4)\sqrt{-\lambda}$ подобно энергии гармонического осциллятора. Движение тоже будет финитным: $0 \leq R \leq R_{\text{макс}}$. Таким образом, при $\Lambda < 0$ принципиального отличия от случая $\Lambda = 0$ нет. Кроме того, при $\Lambda < 0$ результаты полностью соответствуют классическим.

При $\Lambda > 0$ V имеет вид потенциального барьера, мало отличающегося при больших x от параболического. При $Nm \geq 8\pi^2 \lambda^{-1/2} = V_{\text{макс}}$ спектр масс непрерывен и движение инфинитно в одну сторону. При $Nm < V_{\text{макс}}$ спектр тоже непрерывен. Однако если при решении используется условие излучения, т. е. решение за барьером ищут в виде уходящей волны, то это условие «выбирает» из непрерывного спектра отдельные уровни, которые уже не будут стационарными, как при $\Lambda < 0$, $\Lambda = 0$.

Для определения этих, так называемых квазистационарных, уровней используем хорошо известную в квантовой механике процедуру [110], в результате которой приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \sin \left(\int_0^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \exp \left(\int_{x_1}^{x_2} |p| dx \right) + \cos \left\{ \int_0^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} - \int_{x_1}^{x_2} |p| dx \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.87)$$

где $|p| = \sqrt{(64\pi^2/3)[V(x) - Nm]}$; x_1 и x_2 — точки поворота.

Решим это уравнение приближенно, считая, что

$$\int_{x_1}^{x_2} |p| dx \gg 1, \text{ т. е. } Nm/8\pi^2 \lambda^{-1/2} \ll 1. \quad (4.88)$$

Этому случаю соответствуют энергии системы, много меньшие значения $V_{\text{макс}}$. В результате получаем, что $Nm = [48\pi^2 (n + 3/4)]^{1/2}$. Представляя энергию как $Nm = E = E_0 + i\Gamma$, где E_0 — энергия квазистационарных уровней, а $1/\Gamma = \tau$ — время жизни квазистационарного уровня с энергией E_0 , вычисляем коэффициент прохождения $D = \exp \left\{ -2 \int_{x_1}^{x_2} |p| dx \right\}$, который в этом приближении примет вид:

$$D = \exp \left\{ -18\pi^3 \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(4 + 3\sqrt{2})}{\sqrt{3}} \frac{E_0 \lambda^{1/2}}{36\pi^2} \right] \right\}.$$

В том же приближении для времени жизни из (4.87) имеем следующее уравнение: $\text{sh}(E_0 \Gamma / 24\pi) = D$, или приближенно $E_0 \Gamma / 24\pi \approx D$. Отсюда

$$\tau = \frac{E_0}{24\pi} \exp \left\{ 18\pi^3 \lambda^{-1} \left[1 - \left(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \frac{E_0 \lambda^{1/2}}{36\pi^2} \right] \right\}.$$

Попытаемся сравнить полученные результаты с классическими. При выполнении условия (4.88) возможны модели двух типов — осциллирующая первого рода и монотонная второго рода [84], причем в зависимости от начальных условий реализуется одна из них. В квантовом же подходе имеется отличная от нуля вероятность перехода от модели одного типа к модели другого типа, правда весьма малая, если использовать данные о E_0 и Λ в современную эпоху [114]. Ту же задачу при $\Lambda > 0$ можно решить и в другом пределе, когда $E \approx V_{\text{макс}} = 8\pi^2 \lambda^{-1/2}$. При этом барьер становится почти параболическим, и выражение для коэффициента прохождения D и, значит, коэффициента надбарьерного отражения $R = 1 - D$ известно ([110], с. 214). В нашем случае оно имеет вид:

$$D = \{1 + \exp[-2\pi\lambda^{-1/2}(E_0 - 8\pi^2\lambda^{-1/2})]\}^{-1}$$

или, поскольку $|E_0 - 8\pi^2\lambda^{-1/2}| \ll 8\pi^2\lambda^{-1/2}$,

$$D = \left\{ 1 + \exp \left[-16\pi^3 \lambda^{-1} \left(\frac{E_0 - 8\pi^2 \lambda^{-1/2}}{8\pi^2 \lambda^{-1/2}} \right) \right] \right\}^{-1}.$$

Как видно из этих формул, $D = 1/2$, т. е. перестает быть малым, при $E = V_{\text{макс}} = 8\pi^2 \lambda^{-1/2}$. В классическом подходе этому соответствуют модели трех типов: две асимптотические и статическая модель Эйнштейна. В квантовом подходе статическая модель выпадает, и система с равной вероятностью описывается обеими асимптотическими моделями.

Таким образом, квантование изотропных моделей с Λ -членом приводит к новым интересным результатам, в частности к конечности времени жизни системы, и ставит под вопрос само деление моделей на

замкнутые и открытые. Следует подчеркнуть, что эти чисто квантовые эффекты проявляются при $\Lambda > 0$, а это, вероятно, связано с одним из подходов к интерпретации Λ -члена, в частности, когда он рассматривается как плотность энергии вакуума [6, 86].

Квантование космологических моделей с нелинейным скалярным полем рассмотрено в [117], где показано, что результаты классического и квантового рассмотрения практически совпадают.

Методологические и физические проблемы квантовой космологии в настоящее время еще далеки от своего решения [104]. Здесь имеются определенные трудности. Так, при выводе соотношения неопределенностей для космологических моделей с анизотропией или моделей Фридмана со скалярным полем возникает вопрос о выборе гильбертова пространства для волнового уравнения типа уравнения Клейна—Гордона.

Для решения проблемы о сингулярном состоянии в космологической модели необходимо задать граничные условия сшивания двух волновых решений, одно из которых описывает сжатие по направлению к сингулярному состоянию и другое — расширение в противоположном направлении.

Сложной представляется и проблема квантования решения Толмена, описывающего гравитационное замыкание коллапсирующего материального шара. В частности, интересно выяснить, как в квантовом подходе производится переход из сопутствующей системы отсчета в центральную. Весьма интересна и возможность использования квантовых космологических моделей для описания микровселенных типа планкеонов, так как при учете Λ -члена имеется механизм туннелирования, т. е. вывода энергии наружу.

В этой главе мы останавливались не на всех вопросах, касающихся космологии. Например, ряд проблем рассмотрен в рамках формализма АДМ в [118], квантование космологических моделей со скалярным полем, помимо [8, 112], осуществлено в работах [119], с идеальной жидкостью в [120].

Глава 5

САМОСОГЛАСОВАННЫЙ УЧЕТ КВАНТОВОГРАВИТАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

5.1. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНОЙ СИММЕТРИИ В ИЗОТРОПНОМ МИРЕ

Общие замечания. В настоящее время проблема сингулярного состояния в космологии приобретает большое значение в связи с попытками учета квантовых эффектов на ранних стадиях эволюции Вселенной [8, 82, 104, 122, 123]. При этом могут нарушаться условия известных теорем о сингулярностях [124] и в результате получаться несингулярные космологические решения, даже если гравитационное поле

рассматривается в рамках классической теории [125, 126]. Наиболее интересными квантовыми эффектами, которые в принципе могут предотвращать сингулярное состояние, являются *поляризация вакуума* и *рождение частиц* в нестационарном гравитационном поле, а также *спонтанное нарушение симметрии* физических полей, заполняющих Вселенную [126—129]. На этих эффектах мы и остановимся. Сначала нас будет интересовать спонтанное нарушение калибровочной симметрии конформного скалярного поля и его влияние на метрики однородных и изотропных моделей. Здесь будут рассмотрены все модели в рамках единой схемы с учетом космологической постоянной и без нее. Различные материальные поля (кроме гравитационного) будем предполагать квантованными или классическими в зависимости от физических условий.

Вначале покажем, что конформно-инвариантное безмассовое скалярное поле со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией устраняет начальную сингулярность в открытой модели. В дальнейшем будет доказано, что вывод об отсутствии этой сингулярности сохраняется, если исходное скалярное поле массивно и находится во Вселенной, заполненной различными типами излучения*, а также при учете постоянного Λ -члена. Затем выясним особенности закрытой модели, а также получим результат об эволюции масс эффективных частиц.

Несингулярная открытая космологическая модель — результат наличия во Вселенной нелинейного безмассового скалярного поля [128, 129]. Пусть лагранжиан системы имеет вид ($c = \hbar = 1$):

$$L = \sqrt{-g} [g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi^* \nabla_\beta \varphi - (m^2 + R/6) \varphi^* \varphi - (\lambda/6) (\varphi^* \varphi)^2]. \quad (5.1)$$

Этому лагранжиану соответствует уравнение скалярного поля

$$\square \varphi + (m^2 + R/6) \varphi + (\lambda/3) \varphi^* \varphi^2 = 0. \quad (5.2)$$

Рассмотрим квантованное скалярное поле $\varphi(x)$ в метрике Робертсона—Уокера, где собственное космологическое время τ и переменная η связаны соотношением $d\tau = a d\eta$:

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - dr^2/(1 - kr^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (5.3)$$

Знак тензора кривизны такой, что для любого A_σ : $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\sigma = R^\alpha_{\sigma\mu\nu} A_\alpha$.

Лагранжиан (5.1) инвариантен относительно калибровочных преобразований скалярного поля: $\varphi \rightarrow \varphi \exp(i\alpha)$, $\varphi^* \rightarrow \varphi^* \exp(-i\alpha)$. В рассматриваемой теории в открытой модели существует спонтанное нарушение этой инвариантности даже при $m^2 \geq 0$.

*Непосредственно из наблюдений температуры реликтового излучения следует, что уравнение состояния материи на ранних этапах эволюции Вселенной должно быть: $\varepsilon = 3p$.

Пусть $|0\rangle$ — гейзенберговское вакуумное состояние, определенное в начальный момент $\eta = 0$ [58]. Вследствие однородности и изотропности модели с метрикой (5.3)

$$\langle 0 | \varphi(\eta, x) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(\eta, 0) | 0 \rangle \equiv V(\eta), \quad (5.4)$$

что означает пространственную трансляционную инвариантность вакуумного состояния $|0\rangle$. Считаем, что однородность и изотропность — естественные свойства вакуума, поэтому в принципе не рассматриваем аналогичную задачу в анизотропных моделях даже на уровне возмущений. Если $V(\eta) \neq 0$, то вакуумное состояние $|0\rangle$, очевидно, не инвариантно относительно глобальных фазовых преобразований $\varphi \rightarrow \exp(i\alpha)\varphi$, что при инвариантном лагранжиане (5.1) означает наличие спонтанного нарушения калибровочной симметрии в нашей схеме. Докажем, что $V(\eta) \neq 0$.

Усредним уравнение (5.2) по состоянию $|0\rangle$, используя подобно [58] соотношение

$$\langle 0 | \varphi^* \varphi^2 | 0 \rangle \approx \langle 0 | \varphi^* | 0 \rangle \langle 0 | \varphi | 0 \rangle^2 = V^3(\eta). \quad (5.5)$$

Совершая в (5.2) замену $V(\eta) = \sqrt{3/\lambda} f(\eta)/a(\eta)$ (положив тем самым $\lambda > 0$), находим уравнение для функции f :

$$\ddot{f} + f(m^2 a^2 + k) + f^3 = 0. \quad (5.6)$$

Таким образом, вопрос о наличии спонтанного нарушения калибровочной симметрии в рассматриваемой теории сводится к вопросу о наличии устойчивых ненулевых решений (5.6) в тех случаях, когда нулевое решение оказывается неустойчивым.

Нетрудно видеть, что при $m = 0$ в открытой модели ($k = -1$) уравнение (5.6) имеет устойчивые решения $f = \pm 1$ [130—132] и неустойчивое решение $f = 0$. Такая ситуация соответствует наличию спонтанного нарушения калибровочной симметрии.

Действительно, первый интеграл (5.6) при $m = 0$ есть:

$$\dot{f}^2 - f^2 + f^4/4 = C,$$

откуда $\eta = \int (f^2 - f^4/2 + C)^{-1/2} df$. При $[1 + (1 + 2C)^{1/2}]^{1/2} > f \geq 0$ ($C_{\min} = -1/2$) находим общее решение через эллиптическую функцию Якоби:

$$\{1 + (1 + 2C)^{1/2}\} f^2(\eta) = 1 - \operatorname{sn}^2 \left\{ (1 + 2C)^{1/4} \eta, \frac{[1 + (1 + 2C)^{1/2}]^{1/2}}{\sqrt{2}(1 + 2C)^{1/2}} \right\}.$$

Выясним теперь обратное влияние рассматриваемого скалярного поля на метрику открытой космологической модели. Ранее мы условились рассматривать гравитационное поле классически, т. е. определять метрику модели с помощью уравнений Эйнштейна (в общем случае с Λ -членом) [6]:

$$R_{\mu}^{\nu} - (1/2) \delta_{\mu}^{\nu} R + \delta_{\mu}^{\nu} \Lambda = -\kappa \langle 0 | T_{\mu}^{\nu} | 0 \rangle, \quad (5.7)$$

где T_{μ}^{ν} — тензор энергии-импульса квантовой материи. Рассмотрим случай $T_{\mu}^{\nu} = T_{(s)\mu}^{\nu}$, где $T_{(s)\mu}^{\nu}$ — тензор энергии-импульса скалярного поля,

получаемый по лагранжиану (5.1) в виде [132]

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\nu} = & \nabla_{\mu} \varphi^* \nabla^{\nu} \varphi + \nabla^{\nu} \varphi^* \nabla_{\mu} \varphi - \\ & - \delta_{\mu}^{\nu} [\nabla^{\alpha} \varphi^* \nabla_{\alpha} \varphi - m^2 \varphi^* \varphi] - (1/3) [R_{\mu}^{\nu} - \\ & - (1/2) \delta_{\mu}^{\nu} R + \nabla^{\nu} \nabla_{\mu} - \delta_{\mu}^{\nu} \square] \varphi^* \varphi + (\lambda/6) \delta_{\mu}^{\nu} (\varphi^* \varphi)^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для плотности энергии, которой обладает поле φ в несимметричном вакуумном состоянии $|0\rangle$, имеем аналогично [132]

$$\varepsilon_{sv}(\eta) \equiv \langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle = (3f^2/\lambda a^4) (m^2 a^2 + k + f^2/2 + f^2/f^2). \quad (5.9)$$

Учитывая, что при $k = -1$ в вакуумном состоянии для безмассового поля $f^2 = 1$, плотность энергии и давление при $m = 0$:

$$\varepsilon(\eta) = -3/2\lambda a^4; \quad p(\eta) = -1/2\lambda a^4. \quad (5.10)$$

Действительно, для общего решения получается $\varepsilon(\eta) = 3C/\lambda a^4$, а поскольку $\min C = -1/2$, $f = \pm 1$, то $\min \varepsilon(\eta) = -3/2\lambda a^4$, т. е. верно (5.10).

С помощью (5.10) и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -компоненты уравнений Эйнштейна находим следующую зависимость масштабного фактора от времени [129], если $\Lambda = 0$:

$$\eta = \pm \int da / (\kappa \varepsilon a^4/3 + a^2)^{1/2}, \quad (5.11)$$

где $a = (L^2 + t^2)^{1/2}$, $L = (\kappa/2\lambda)^{1/2} \sim 10^{-33}$ см, если $\lambda \sim 1$.

В [127] формально также получено несингулярное решение. Там сначала рассмотрено спонтанное нарушение конформной симметрии в заданном поле, а затем результат подставляется в уравнения Эйнштейна. Но эйнштейновский лагранжиан явно нарушает конформную симметрию, поэтому при таком подходе вообще нельзя говорить о спонтанном нарушении конформной симметрии. Как и делалось выше, можно ставить только вопрос об обратном влиянии эффекта спонтанного нарушения калибровочной симметрии конформного скалярного поля на эволюцию Вселенной [129].

Таким образом, учет квантовых вакуумных эффектов, в данном случае обратного влияния спонтанного нарушения калибровочной симметрии, приводит к предотвращению начального сингулярного состояния в космологии, ибо, как отмечено в [132], оно энергетически выгодно на всех этапах эволюции Вселенной, а поэтому должно реализоваться с самого начала.

Подчеркнем, что зависимость $a = (L^2 + t^2)^{1/2}$, если она не меняется при наличии материи, приводит к значениям максимального красного смещения, параметра замедления и возраста Вселенной, согласующимся с данными наблюдений. В [132] при переходе к сдвинутым полям получен также спектр эффективных масс частиц, а именно: $m_1^2 = 3/a^2$; $m_2^2 = 1/a^2$. Для решения (5.11) в момент наибольшего сжатия (поскольку существует минимальный радиус Вселенной) этим массам соответствуют планковские массы $m_1^2 = 3/L^2 = 6\lambda/\kappa \sim m_L^2$; $m_2^2 = 2\lambda/\kappa \sim m_L^2$ ($\lambda \sim 1$), которые к современной эпохе $a = t = 10^{27}$ см эволюционируют до масс гравитонов, если не произойдет вос-

становления симметрии; $m_1 \sim m_2 \sim m_L [1 + (t/L)^2]^{-1/2} \sim m_L \cdot 10^{-60} \sim 10^{-65}$ г. Поэтому эти реликтовые хиггсовские скалярные частицы, если они будут когда-либо обнаружены, смогут служить детекторами квантовых свойств вакуума на ранних стадиях развития Вселенной ($t_L = m_L^{-1} \sim 10^{-43}$ с). В [132] показано также, что при введении в систему безмассового скалярного и гравитационного полей электромагнитного поля векторная частица приобретает массу $m_V^2 = 6e^2/\lambda a^2$, т. е. приблизительно в e раз меньшую, чем скалярная частица. Таким образом, используя решение (5.11), найдем, что массы фотонов эволюционируют от масс электромагнитных планкеонов $m_L \sim 10^{-6}$ г при $t_L \sim 10^{-43}$ с до $m_V \sim 10^{-66}$ г в настоящую эпоху, так как

$$m_V^2 \sim m_L^2 \alpha / [1 + (t/L)^2],$$

где α — постоянная тонкой структуры. Результат о наличии массы покоя фотонов и гравитонов в изотропной метрике был впервые получен другими методами в [1] при исследовании электродинамики в римановом пространстве.

Отметим, что анализ, проведенный в [132] для массивного поля, основан на предположении о зависимости масштабного фактора от времени типа $a(\eta) = a_1 \eta^p$ и на использовании решения для безмассового поля как асимптотики при $\eta \rightarrow 0$ для массивного поля. Мы показали, что учет безмассового поля приводит к несингулярному космологическому решению, поэтому решение при $m = 0$ нельзя использовать в качестве начальных данных при $m \neq 0$, не говоря уже о том, что задавать любые начальные данные в сингулярности, т. е. в состоянии с бесконечной плотностью, по меньшей мере нефизично. Таким образом, все вычисления и выводы [132], относящиеся к массивному скалярному полю, не представляются нам правильными. Эту задачу, если и нужно ставить, то с другими начальными данными.

Для закрытой модели при $m = 0$ первый интеграл уравнения для функции f есть

$$\dot{f}^2 + f^2 + f^4/2 = C \geq 0,$$

поэтому $\varepsilon(\eta) = 3C/\lambda a^4 \geq 0$, и спонтанного нарушения симметрии нет. Вакуумное скалярное поле ведет себя как обычное излучение, и в самосогласованной модели имеется сингулярность.

Учет наличия материи [128]. Пусть наряду со скалярным полем имеются еще пылевидное вещество и излучение, не взаимодействующие непосредственно друг с другом и со скалярным полем. Такая модель материи хорошо описывает ее свойства при больших и малых временах (плотностях). В этом случае из $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -компоненты уравнений Эйнштейна следует [67]

$$d\eta = da / [(\kappa/3) \varepsilon_{\text{полн}} a^4 + a^2]^{1/2}, \quad (5.12)$$

где $\varepsilon_{\text{полн}} = \varepsilon_s + \varepsilon_{\text{и}} + \varepsilon_{\text{в}}$ — полная плотность энергии (индексы «и» и «в» относятся к излучению и веществу). Поскольку вещество и из-

лучение не взаимодействуют, из термодинамических соображений следуют такие зависимости их плотности энергии от радиуса:

$$\varepsilon_{\text{и}} = \varepsilon_{\text{и}0} a_0^4 / a^4; \quad \varepsilon_{\text{в}} = \varepsilon_{\text{в}0} a_0^3 / a^3, \quad (5.13)$$

где ε_0 , a_0 — современные значения плотности энергии и радиуса. Подставляя (5.13) и (5.10) в (5.12) и интегрируя, получаем:

$$a = -b + (b^2 + C)^{1/2} \operatorname{ch} \eta, \quad (5.14)$$

где $b = \varepsilon_{\text{в}0} a_0^3 \kappa / 6$; $C = \kappa / 2\lambda - \varepsilon_{\text{и}0} a_0^4 \kappa / 3$, причем формула (5.14) имеет смысл только при

$$a > a_{\text{мин}} = -b + (b^2 + C)^{1/2}; \quad (5.15)$$

$$\lambda < 3/2 \varepsilon_{\text{и}0} a_0^4 \sim 10^{-118}. \quad (5.16)$$

Таким образом, если во Вселенной с самого начала присутствует квантованное безмассовое скалярное поле, то наличие вещества и излучения не приводит к появлению сингулярного состояния. Используя оценку (5.16), приходим к значению

$$a_{\text{мин}} \approx (\varepsilon_{\text{и}0} / \varepsilon_{\text{в}0}) a_0 (3/2 \lambda \varepsilon_{\text{и}0} a_0^4 - 1).$$

Спектр эффективных масс частиц будет задаваться теми же формулами, что и в присутствии только скалярного поля, т. е. в момент наибольшего сжатия: $m_1 \sim m_2 \sim a_{\text{мин}}^{-1}$. Получив с помощью (5.14) $a \approx t$ при $t \gg a_{\text{мин}}$, имеем эволюцию масс частиц $m_1 \sim m_2 \sim t^{-1}$, что снова для современной эпохи $t \sim 10^{17}$ с дает: $m_1 \sim m_2 \sim (ct)^{-1} \sim \sim 10^{-65}$ г. Слишком малое λ (5.16) делает маловероятным наличие вещества и излучения в начальную эпоху и указывает на то, что оно появляется позднее, возможно, как результат рождения пар частиц в гравитационном поле.

Случай массивного скалярного поля ($k = -1$, $m < m_L$) [128]. Хорошо известно, что на ранних стадиях эволюции Вселенной (малые a) уравнение массивного скалярного поля почти не отличается от уравнения безмассового поля, так как член с кривизной $R/6$ преобладает над m^2 при всех $a < m^{-1}$ [104]. Поэтому естественно ожидать, что и в случае массивного поля мы придем к несингулярной космологии. Пусть $a_{\text{мин}}$ — минимальное значение масштабного фактора. Разлагая a в ряд по η , при $\eta \ll 1$ приходим к следующему решению (5.6) для f с точностью до $(\eta^2 m^2 a_{\text{мин}}^2)$:

$$f \approx \sqrt{1 - m^2 a_{\text{мин}}^2}, \quad \dot{f} \approx 0.$$

Плотность энергии (5.9) в этом же приближении

$$\varepsilon(\eta) \approx -3(1 - m^2 a_{\text{мин}}^2)^2 / 2\lambda a^4 < 0. \quad (5.17)$$

Таким образом, и в этом случае плотность энергии скалярного поля в вакуумном состоянии меньше, чем при тривиальном решении $\varepsilon(f) = \varepsilon(0) = 0$, т. е. на малых временах спонтанно нарушается калибровочная симметрия.

Подстановка (5.17) в уравнения Эйнштейна снова дает несингулярное решение типа (5.11). Следует подчеркнуть, что в отличие от без-

массового поля в массивном происходит восстановление симметрии при $a \approx m^{-1}$. Действительно, как видно из (5.9), при больших a ($ma > 1$) плотность энергии заведомо положительна и истинный вакуум соответствует тривиальному решению. Поэтому вначале массы эволюционируют: $m_1^2 = m^2 + 3f^2/a^2$, $m_2^2 = m^2 + f^2/a^2$, где согласно нашему решению $f(0) \approx 1$, $a \approx L$ (для $m \ll m_L$), вплоть до значений $m_{1,2} \sim \sim a^{-1}$ в момент восстановления симметрии. Затем, когда симметрия восстановлена, массы перестают эволюционировать, и мы получаем массивное скалярное поле со значениями эффективных масс, близкими к затравочным. Эволюция космологической модели в этом случае исследовалась в [8]. При этом массивное скалярное поле для $a \gg m^{-1}$ ведет себя как пылевидное вещество, и, следовательно, мы приходим к хорошо известным решениям Фридмана, согласующимся с данными наблюдений. Найденный нами механизм восстановления симметрии и есть необходимый механизм перехода от несингулярного решения к фридмановскому в моделях с самосогласованным учетом рождения частиц.

Рассматривая аналогично открытую космологическую модель, в которой присутствуют вещество и излучение, имеем: $b \rightarrow b' = b/d$, $C \rightarrow C' = C/d$; $\eta \rightarrow \eta' = \sqrt{d}\eta$, где $d = 1 + m^2\kappa/\lambda$; $\eta' \ll 1$, причем $a_{\min}$ при $ma_{\min} \ll 1$ совпадают с (5.15) и в синхронном времени $a \approx t$ при $t \gg a_{\min}$.

Отсутствие сингулярности в моделях с массивным скалярным полем, излучением и Λ -членом [128]. Проведем рассмотрение в рамках единой для всех моделей схемы, т. е. для любого k , при условии, что скалярное поле и излучение не взаимодействуют друг с другом непосредственно. Ограничимся пока тензором энергии-импульса материи в виде суммы (так как нет взаимодействия) тензоров энергии-импульса скалярного поля и излучения. В этом случае уравнения Эйнштейна есть:

$$R_\mu^\nu - (1/2) \delta_\mu^\nu R + \delta_\mu^\nu \Lambda = -\kappa [\langle T_{\mu}^\nu \rangle_{(s)} + T_{\mu}^\nu]_{(n)},$$

где $\langle T_{\mu}^\nu \rangle_{(s)}$ — тензор энергии-импульса скалярного поля, усредненный по вакуумному состоянию; $T_{\mu}^\nu_{(n)}$ — тензор энергии-импульса мак-

роскопического излучения. Материю мы задаем в виде поля излучения, поскольку оно доминирует над веществом при малых значениях масштабного фактора, а именно эта область значений a нас интересует.

Теорема. Для того чтобы модель Вселенной, заполненной скалярным полем с самодействием, была несингулярной, необходимо и достаточно, чтобы это поле обладало на малых временах спонтанно нарушенной калибровочной симметрией и выполнялось условие $m^2 a_{\min}^2 < -k$, где $a_{\min} = \min a$.

Доказательство необходимости. Предположим, что космологическая модель Вселенной, заполненной скалярным полем, несингулярна, т. е. $a \approx \min a \equiv a_{\min}$ при малых η . В этом случае первый интеграл (5.6) есть

$$(1/2) \dot{f}^2 + \Pi_m = f_m, \quad (5.18)$$

где $\Pi_m = (1/2) (m^2 a_{\text{мин}}^2 + k) f^2 + f^4/4$; $f_m = \text{const}$. Качественное исследование этих соотношений приводит к выводу, что если

$$m^2 < -k/a_{\text{мин}}^2, \quad (5.19)$$

то уравнение (5.18) будет иметь устойчивые ненулевые решения [130, 131], причем минимуму потенциальной энергии соответствуют значения $f = \pm \sqrt{-(m^2 a_{\text{мин}}^2 + k)}$. Это в свою очередь означает наличие ненулевых вакуумных средних скалярного поля, т. е. спонтанное нарушение калибровочной инвариантности. В закрытой и квазиевклидовой модели условие (5.19) выполняется для тахионных масс, а в открытой — при условии, что минимальный радиус меньше комптоновской длины волны частицы $a_{\text{мин}} < m^{-1}$. Используя (5.18) при $a \approx a_{\text{мин}}$, из (5.9) получаем

$$\varepsilon(\eta) = 6f_m/\lambda a_{\text{мин}}^4 = \text{const}/a^4, \quad \eta \ll 1.$$

При $a \approx a_{\text{мин}}$ решением уравнения (5.6) с точностью до первого порядка по η включительно будет:

$$f(\eta) = \sqrt{-(m^2 a_m^2 + k)}; \quad \dot{f}(\eta) = 0, \quad m^2 a_m^2 + k < 0, \quad a_m \equiv a_{\text{мин}}.$$

В этом случае плотность энергии поля ϕ определится из (5.9) как

$$\varepsilon_s(\eta) \approx -(3/2\lambda a^4) (m^2 a_m^2 + k)^2 < 0, \quad \eta \ll 1. \quad (5.20)$$

Видно, что эта величина меньше плотности энергии $\varepsilon_s(\eta) = 0$, соответствующей тривиальному решению $f = 0$, а потому именно оно реализуется при малых η . Тем самым необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Выпишем $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -компоненту уравнений Эйнштейна:

$$(1/2) (da/d\eta)^2 - (2/3) \Lambda a^4/4 + ka^2/2 = -h^2/2, \quad (5.21)$$

причем

$$h^2 = -(\kappa/3) a^4 (\varepsilon_{\text{и}} + \varepsilon_s) = \text{const}, \quad (5.22)$$

где ε_s задается выражением (5.20). Величина h^2 постоянна, так как $\varepsilon_{\text{и}} = \varepsilon_{\text{и}0} a_0^4/a^4$, где $\varepsilon_{\text{и}0}$, a_0 — современные значения плотности энергии излучения и масштабного фактора. Положив

$$\lambda < (3/2\varepsilon_{\text{и}0} a_0^4) (m^2 a_m^2 + k)^2, \quad (5.23)$$

будем иметь

$$h^2 > 0. \quad (5.24)$$

Таким образом, если мы докажем, что при условии (5.24) существуют только несингулярные космологические модели, то тем самым будет доказано, что достаточным условием несингулярности моделей будет наличие скалярного поля (5.2) со спонтанным нарушением симметрии.

Обозначив

$$\Pi = ka^2/2 - (2/3) \Lambda a^4/4, \quad (5.25)$$

проведем качественное исследование уравнения для масштабного фак-

тора (5.21). Из (5.21), (5.25) имеем необходимое условие эволюции масштабного фактора для любого k :

$$|\dot{a}_\eta| \equiv |da/d\eta| = \sqrt{2(-h^2/2 - \Pi)} \geq 0, \quad (5.26)$$

т. е. $\Pi \leq -h^2/2$.

Рассмотрим закрытые модели, т. е. $k = +1$. Для этого случая на фазовой плоскости (рис. 1) изображено решение уравнения (5.21). Графическое построение показывает, что при $\Lambda > 0$ скалярное поле,

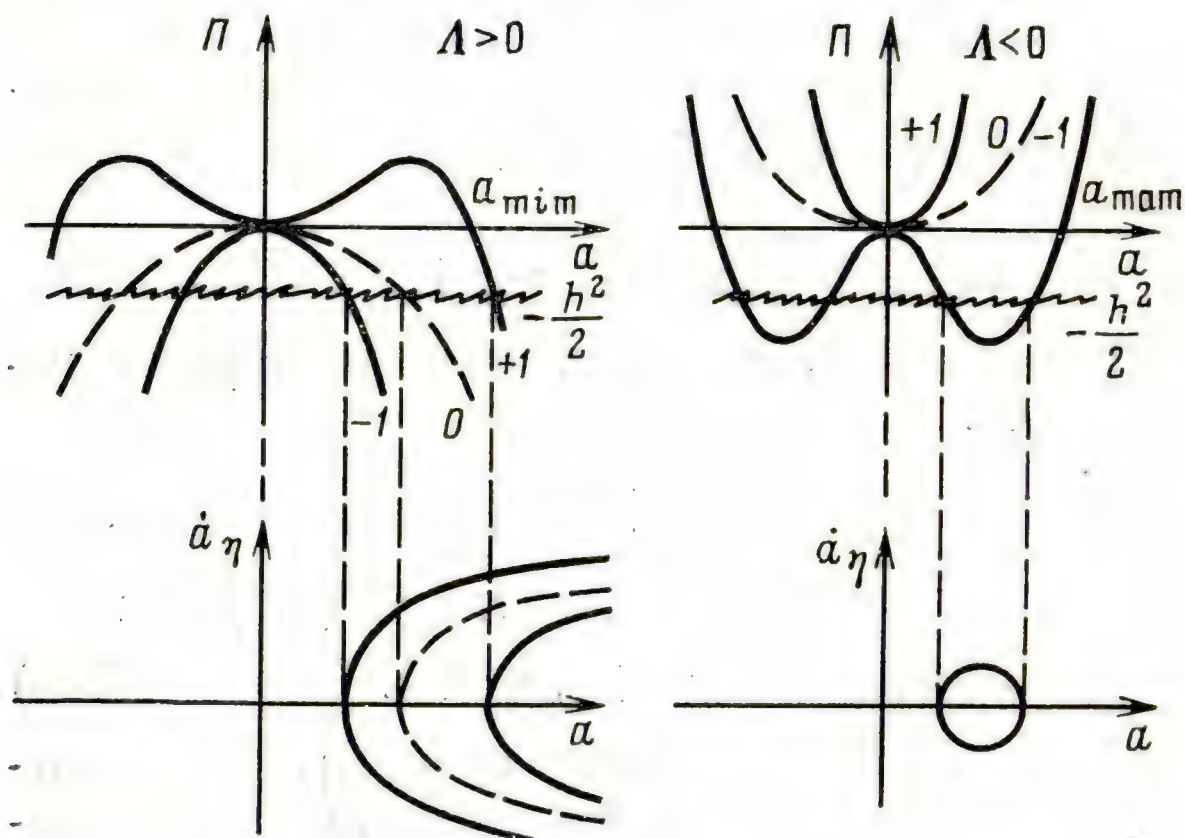


Рис. 1. Ход потенциальной энергии $a_{\min} = \sqrt{3/\Lambda}$, $a_{\max} = \sqrt{6/|\Lambda|}$ (вверху) и фазовая плоскость уравнения (внизу). Нумерация кривых обозначает тип пространства

обладающее такой отрицательной плотностью энергии, что выполняется (5.24), обеспечивает несингулярную космологию; $\min a$ определяется из условия

$$\Pi = -h^2/2; \quad (5.27)$$

$\min_{\text{огранич}} \min a \equiv a_{\min} = \sqrt{3/\Lambda}$ — из условия

$$\Pi = -h^2/2 = 0. \quad (5.28)$$

Если $\Lambda < 0$ (см. рис. 1), то такая закрытая модель невозможна из-за наличия скалярного поля, удовлетворяющего условию (5.24). Квази-евклидовой модели с $k = 0$ соответствует на фазовой плоскости интегральная кривая, изображенная на рис. 1 пунктиром. Аналогично закрытой модели в этом случае при $\Lambda > 0$ реализуется несингулярная космология, $\min a$ определяется также согласно (5.27); при $\Lambda < 0$ условие (5.26) не выполняется, что делает невозможным существование такой квази-евклидовой модели со скалярным полем, удовлетворяющим условию (5.24). Исследование открытой модели с $k = -1$ (рис. 1) при $\Lambda > 0$ дает несингулярную космологию; как и в двух предыдущих случаях, $\min a$ также определяется из (5.27). При $\Lambda < 0$ будет иметь место открытая модель с осциллирующим масштабным фактором. В этом случае условие (5.27) будет давать как $\min a$, так и $\max a$, а условие (5.28) — как $\min a = 0$ (тривиальный случай), так и $\max_{\text{огранич}} \max a \equiv a_{\max}$.

Таким образом, мы выяснили, что скалярное поле, удовлетворяющее условию (5.24), реализует несингулярные модели Вселенной четырех типов. Переходя к космологическому времени τ в уравнении (5.21) и интегрируя, получаем следующие зависимости масштабного фактора для этих космологических моделей:

при $\Lambda > 0; k = +1, 0, -1$

$$a = \sqrt{\frac{3}{2\Lambda}} \left\{ \sqrt{|k| + \frac{4}{3} \Lambda h^2} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{4}{3} \Lambda} \tau \right) \sqrt{\frac{4}{3} \Lambda + k} \right\}^{1/2}; \quad (5.29)$$

при $\Lambda = 0; k = -1$

$$a = \sqrt{h^2 + \tau^2}$$

[последнее, естественно, совпадает с (5.11) при $m = 0$]. Очевидно, что при $\Lambda = 0; k = +1, 0$ космологических моделей нет, однако

$$a_m = \sqrt{\frac{3}{2\Lambda}} \left\{ \sqrt{|k| + \frac{4}{3} \Lambda h^2 + k} \right\}^{1/2} > 0$$

для всех моделей с $\Lambda > 0$;

при $\Lambda < 0; k = -1$

$$a = \sqrt{\frac{3}{2|\Lambda|}} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{4}{3} |\Lambda| h^2 \right)^{1/2} \cos \sqrt{\frac{4}{3} |\Lambda|} \tau \right\}^{1/2}. \quad (5.30)$$

Тем самым мы доказали теорему о том, что присутствие скалярного поля с самодействием (5.23) устраняет сингулярность в закрытой и квазиевклидовой модели, если квадрат затравочной массы отрицателен и удовлетворяет (5.19), в открытой модели — если $m^2 < 1/a_m^2$. Из (5.29), (5.30) при $\eta \ll 1$ получается, что $a_m = a_m(\lambda, m)$, что дает в открытой модели следующие значения a_m :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{при } \Lambda = 0, \quad m \sim 10^{-5} \text{ г}, \quad \lambda \leq 1: & a_m \sim 10^{-33} \text{ см;} \\ \text{при } \Lambda = 0, \quad m \sim 10^{-25} \text{ г}, \quad \lambda \sim 10^{-40}: & a_m \sim 10^{-33} \text{ см;} \\ \text{при } \Lambda > 0, \quad m \sim 10^{-5} \text{ г}, \quad \lambda \leq 1: & a_m \sim 10^{-33} \text{ см;} \\ \text{при } \Lambda < 0, \quad m \sim 10^{-5} \text{ г}, \quad \lambda \leq 1: & a_m \sim 10^{-33} \text{ см;} \\ \text{при } \Lambda < 0, \quad m \sim 10^{-25} \text{ г}, \quad \lambda \lesssim 10^{-40}: & a_m \sim 10^{-13} \text{ см.} \end{array} \right\} \quad (5.31)$$

Проведем анализ, аналогичный сделанному для безмассового поля. Можно получить решения (5.6) с точностью до первого порядка по η включительно: $f^2(\eta) = 1, \dot{f}(\eta) = 0$ (так как точное решение будет выражаться через эллиптический косинус [130]). Используя эти решения, нетрудно видеть, что эволюция масштабного фактора будет определяться формулами (5.29), (5.30), где $h^2 \rightarrow h_{m=0}^2, k = -1$. Подчеркнем, что безмассовое поле устраняет сингулярность только в открытой модели, так как лишь при $k = -1$ существует спонтанное нарушение калибровочной симметрии.

В закрытой модели мы получили, что всегда $a_m \geq \sqrt{3/\Lambda} \sim 10^{28}$ см. Поэтому в данном случае предположение о доминирующей роли излучения ввиду большого начального значения масштабного фактора неправильно, и необходимо учитывать также пылевидное вещество (см. следующий подраздел). Предположение о доминирующей роли излу-

чения в открытой и евклидовой модели справедливо, поскольку λ — свободный параметр теории: соответствующим его выбором, достаточно близким к значению (5.23), можно сделать масштабный фактор исходного несингулярного состояния достаточно малым по сравнению с современным.

Учет пылевидного вещества в закрытой модели. Эволюция масс скалярных бозонов. С учетом пылевидного вещества уравнение (5.21) примет вид ($k = +1$):

$$\frac{1}{2} \dot{a}_\eta^2 - \left(\frac{2\Lambda}{3} \right) \frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{\kappa}{6} \varepsilon_{B0} a_0^3 a = -\frac{h^2}{2}, \quad (5.32)$$

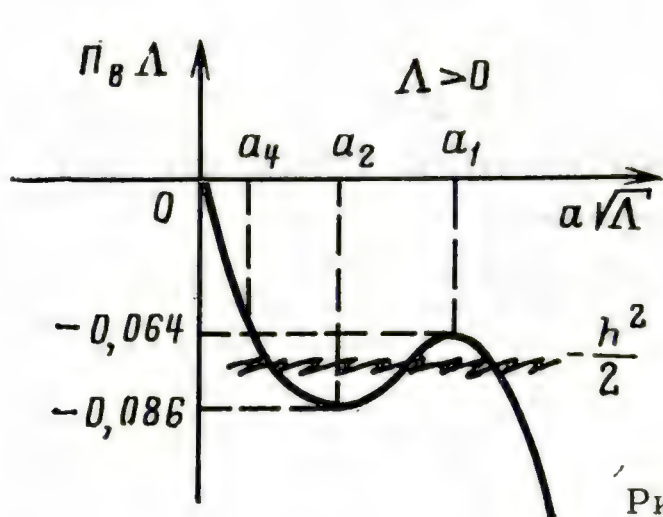


Рис. 2

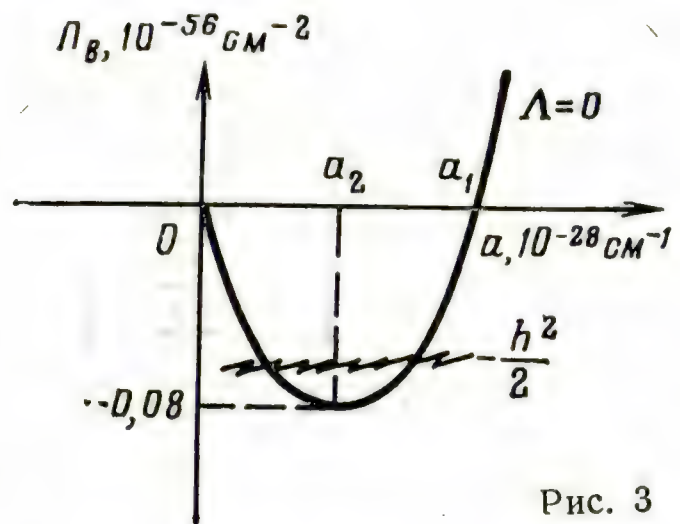


Рис. 3

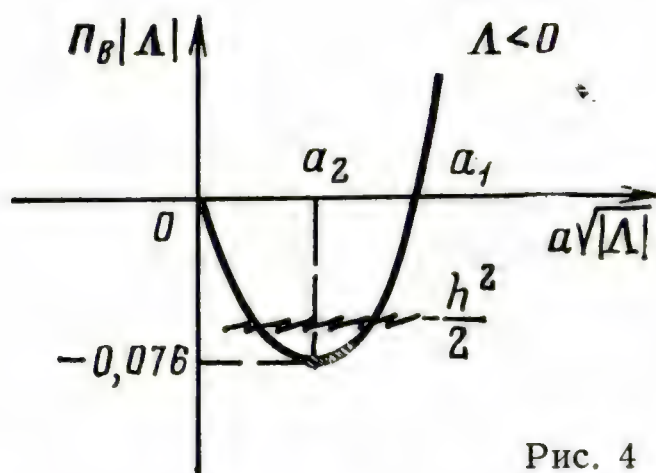


Рис. 4

Рис. 2. Ход потенциальной энергии: $a_1 \approx 0,92$; $a_2 \approx 0,47$; $a_4 \approx 0,22$

Рис. 3. Ход потенциальной энергии: $a_1 \approx 0,8$; $a_2 \approx 0,4$

Рис. 4. Ход потенциальной энергии: $a_1 \approx 0,69$; $a_2 \approx 0,37$

где ε_{B0} — плотность энергии пылевидного вещества в настоящее время.

Обозначив

$$\Pi_B = -(\kappa/6) \varepsilon_{B0} a_0^3 a + a^2/2 - (2\Lambda/3) a^4/4, \quad (5.33)$$

построим графики этой величины для различных значений Λ (рис. 2—4), считая, что если $\Lambda \neq 0$, то $|\Lambda| \sim 10^{-56} \text{ см}^{-2}$. Проанализируем эти графики. На графиках специально указаны числовые значения различных величин: можно привести соответствующие аналитические выражения, но они весьма громоздки. Из рис. 2 при $\Lambda > 0$ можно видеть, что если $\Pi_B(a_2) \leq -h^2/2 \leq \Pi_B(a_1)$, то реализуются космологии пяти типов: A_1^- , O_2^- , A_2^- , M_2^- , O_3^- (аналогично классификации Толмена [133] индекс минус обозначает решение с отрицательной энергией) в зависимости от начального значения масштабного фактора. Тип $O_3^- = O_2^- (a_2)$ — новый тип устойчивой статической модели, по-видимому, не реализующийся в мире, так как здесь $a = a_2 = \text{const}$. Если $\Pi_B(a_1) < -h^2/2 < \Pi_B(a_i)$ или $-h^2/2 < \Pi_B(a_2)$, где a_i — значение радиуса, при котором прекращается взаимодействие вещества и из-

лучения (Вселенная переходит из радиационно-доминирующей стадии своей эволюции в стадию преобладания вещества [124, 134]), то реализуются космологии типа M_1^- и нового типа M_3 ; космология M_1^- напоминает модель Леметра из-за наличия в ней «периода отдыха» [124] при $a \approx a_1$. Мы записали уравнение эволюции радиуса (5.32) при условии, что вещество и излучение не взаимодействуют, поэтому здесь не рассматриваем случай $\Pi_B(a_i) < -h^2/2$; эта ситуация определяет радиационно-доминированную стадию эволюции и была рассмотрена выше. Из рис. 3 при $\Lambda = 0$ можно видеть, проведя анализ, аналогичный только что сделанному, что при $\Pi_B(a_2) \leq -h^2/2 < \Pi_B(a_i)$ существует космологическая модель типа O_2^- ; при $-h^2/2 < \Pi_B(a_2)$ моделей нет, т. е. такое скалярное поле не может существовать во Вселенной закрытого типа. Из рис. 4 при $\Lambda < 0$ можно качественно получить то же, что и из рис. 3, с теми же выводами.

Отметим, что все получающиеся космологические модели несингулярны. Отсюда следует, что если сформулировать доказанную теорему при наличии пылевидного вещества, то она будет верна, так как предположение $a \approx a_m$ при $\eta \rightarrow 0$ правильно.

В дальнейшем выберем λ таким, чтобы при заданной массе масштабный фактор исходного состояния a_m соответствовал радиационно-доминантной модели. Выше мы находили оценки минимального значения масштабного фактора в открытой модели ($a_m \sim 10^{-33}$ см и 10^{-13} см). Оценивая λ по формуле (5.23) при $m \sim 10^{-5}$ и 10^{-25} г в открытой модели, получаем, перебирая различные допустимые комбинации a_m и m : $\lambda < 10^{-118}$ при $a_m \sim 10^{-33}$ см, $m \sim 10^{-25}$ г; $\lambda < 10^{-38}$ при $a_m \sim 10^{-13}$ см, $m \sim 10^{-5}$ г.

Спектр масс хиггсовских бозонов. Для определения спектра масс физических частиц перейдем к полям φ_1^0 и φ_2 , определяемым равенствами:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}; \quad \varphi_1^0 = \varphi_1 - \langle 0 | \varphi_1 | 0 \rangle = \varphi_1 - \sqrt{\frac{6}{\lambda}} \frac{f}{a}. \quad (5.34)$$

При этом лагранжиан скалярного поля приобретает вид:

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial x^\beta} - \left(m_1^2 + \frac{R}{6} \right) \varphi_1^{0^2} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^\beta} - \left(m_2^2 + \frac{R}{6} \right) \varphi_2^2 + \sqrt{\lambda} F \right], \quad (5.35)$$

где $F \equiv F(f, a, \varphi_1^0, \varphi_2)$; f определяется из (5.6):

$$\begin{aligned} m_1^2 &= m^2 + 3f^2/a^2, \\ m_2^2 &= m^2 + f^2/a^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Видно, что при наличии спонтанного нарушения симметрии ($f \neq 0$) массы хиггсовских частиц $m_{1,2}$ отличаются от затравочных m и становятся сравнимы с ними только при восстановлении симметрии ($f = 0$) или при $a \rightarrow \infty$.

5.2. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ КОНФОРМНОЙ СИММЕТРИИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ [52]

Известно, что лагранжиан скалярного поля (5.1) конформно-инвариантен. Эйнштейновский лагранжиан $R/2\kappa$ нарушает конформную инвариантность теории (L_m тоже конформно-инвариантен, если в него входят безмассовые электромагнитное, нейтринные и глюонные поля).

В принципе можно брать за основу вакуумную часть конформно-инвариантного лагранжиана (5.1) и получить эйнштейновский лагранжиан за счет механизма спонтанного нарушения конформной симметрии [52]. Пусть, например, исходным является конформно-инвариантное обобщение лагранжиана типа Вайнберга—Салама с калибровочной группой $U(1)$ [135] и пусть только скалярное поле обладает ненулевым вакуумным средним. Тогда в древесном приближении действие с эффективным вакуумным лагранжианом, обладающим конформной симметрией, имеет вид:

$$S_\varphi = - \int d^4 x \sqrt{-g} L_\varphi = - \int d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi^* \nabla_\beta \varphi - \frac{R}{12} \varphi^* \varphi - \frac{\lambda}{12} (\varphi^* \varphi)^2 \right\}. \quad (5.37)$$

Переходя далее к действительному скалярному полю $\varphi \rightarrow \exp(i\alpha) \varphi$ и варьируя действие по $g^{\mu\nu}$ и φ , приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\varphi^2}{6} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = \nabla_\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi - \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{\lambda}{6} \varphi^4 \right) - \frac{1}{6} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - g_{\alpha\beta} \square) \varphi^2; \quad (5.38)$$

$$\square \varphi + (R/6) \varphi + (\lambda/3) \varphi^3 = 0. \quad (5.39)$$

Хорошо известно, что уравнение (5.39) представляет собой следствие (5.38), т. е. не является самостоятельным динамическим полем в случае конформной теории гравитации [действие (5.37)]. Действительно, след (5.38) равен $\varphi [\square \varphi + (R/6) \varphi + (\lambda/3) \varphi^3] = 0$, что при $\varphi \neq 0$ (спонтанное нарушение симметрии) дает (5.39). В силу конформной инвариантности (5.37), а следовательно, и (5.38), (5.39) с помощью конформного преобразования $g'_{\mu\nu}(x) = \exp[-\rho(x)] g_{\mu\nu}(x)$; $\varphi'(x) = \exp[\rho(x)/2] \varphi(x) = \chi = \text{const}$ несложно привести (5.37) к виду

$$S_\chi = \frac{\chi^2}{12} \int d^4 x \sqrt{-g'} (R' + 2\lambda\chi^2).$$

Таким образом, при спонтанном нарушении конформной симметрии, как отмечено в [135], эйнштейновская гравитационная постоянная выражается через вакуумное среднее от скалярного поля $\kappa = 6/\chi^2$, и в лагранжиане появляется аналог космологического члена $\lambda \chi^2/2$. Мы же хотим подчеркнуть, что не менее важно и другое, а именно: появление в действии эйнштейновского члена $R/2\kappa$ — новой макроскопи-

ческой характеристики — как результат спонтанного нарушения конформной симметрии [52]. Иными словами, эйнштейновское действие, по крайней мере ее космологическую часть, можно рассматривать как классическое проявление квантовых свойств вакуума. В связи с этим не исключено, что в основе неудач попыток квантования теории гравитации Эйнштейна лежат глубокие причины. Весьма вероятно, что гравитационные взаимодействия не являются фундаментальными, гравитационное поле по своей природе является сугубо классическим, и его квантовать не надо. Кроме того, из данного анализа следует, что рассматривать чисто конформную теорию гравитации в виде (5.37) не имеет смысла, поскольку квантовые эффекты вакуума переводят ее в теорию гравитации Эйнштейна. Итак, эйнштейновский лагранжиан можно представлять двояко: либо как классическое проявление вакуумных свойств моделей единых теорий типа Вайнберга—Салама, которые хорошо подтверждаются современными экспериментальными данными по элементарным частицам, либо оставаясь в рамках старого подхода, принятого в теории гравитации, при котором предполагается справедливой теория Эйнштейна, а скалярное поле трактуется как материальное или фундаментальное первичное поле. В обоих случаях важно, что гравитационное поле остается сугубо классическим.

В связи с изложенным выше (§ 5.1, 5.2) был предложен [52] следующий «сценарий» эволюции Вселенной; 1) спонтанное нарушение конформной симметрии вакуумного хиггсовского поля и появление гравитации (описываемой лагранжианом Эйнштейна) как классическое проявление квантового эффекта вакуума полей единых теорий поля; 2) спонтанное нарушение калибровочной симметрии хиггсовских вакуумных полей в открытой однородной и изотропной модели и как следствие — начало эволюции Вселенной из несингулярного состояния, так же как квантовый эффект вакуума полей единых теорий поля; 3) образование всей массы Вселенной как эффект рождения пар частиц в эволюционирующем гравитационном поле (см. следующие параграфы). Наконец, отметим, что этапу 1, как хорошо известно, соответствует решение де Ситтера, поскольку $R' = 2\lambda\chi^2 = \text{const}$. Модели эволюции Вселенной, начинающиеся с деситтеровского решения, стали весьма популярны в настоящее время благодаря учету также эффектов поляризации вакуума и рождения частиц. Мы же предложили эту идею ранее, основываясь на другом квантовом эффекте — спонтанном нарушении конформной симметрии [52].

5.3. САМОСОГЛАСОВАННЫЙ УЧЕТ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ P -, CP - И G -СИММЕТРИЙ

Существование устойчивых ненулевых вакуумных средних, которым соответствует низший энергетический уровень, означает, что в рассматриваемой физической системе может реализоваться спонтанное нарушение симметрии (см. § 5.1).

Нетрудно видеть, что лагранжиан (5.1) инвариантен относительно P -преобразований. Перейдем теперь к исследованию заряженного псевдоскалярного поля. Оно имеет пространственную четность $\xi_\varphi(P) = -1$ [136]. В этом случае P -симметрия является спонтанно-нарушенной вследствие существования не-

нулевых вакуумных средних. В [128] (см. также § 5.1) показано, что заряженное скалярное поле имеет спонтанно-нарушенную C -инвариантность в исследуемой модели. Поэтому независимо от P -инвариантности комбинированная CP -четность для заряженного поля является спонтанно-нарушенной.

Если ϕ является изомультиплетом, то когда C -симметрия нарушена, нарушена и G -четность. Это справедливо для заряженного и нейтрального поля ϕ .

Исследуем нейтральное поле. Его можно охарактеризовать пространственной четностью $\xi_\phi(P) = \pm 1$ и зарядовой четностью $\xi_\phi(C) = \pm 1$. Справедливы следующие утверждения об отсутствии или присутствии спонтанного нарушения симметрии в этих случаях: 1) произвольная дискретная симметрия является спонтанно-нарушенной, если собственное значение оператора этой симметрии отрицательно; 2) произвольная дискретная симметрия сохраняется, если собственное значение оператора этой симметрии положительно.

Сделаем некоторые замечания по поводу п. 2. Ненулевые вакуумные средние в нашей схеме существуют постольку, поскольку мы рассматриваем открытую модель Вселенной. Другими словами, отрицательный интеграл энергии (5.10) имеет место в открытой модели, так как естественно приравнять вакуумную энергию нулю в псевдоевклидовой модели Вселенной прибавлением константы. Равенство вакуумной энергии нулю следует из наблюдений малых, а следовательно, псевдоевклидовых областей пространства Вселенной. Необходимо прибавить ту же самую константу к вакуумной энергии при рассмотрении открытой или закрытой модели Вселенной. Для безмассового поля вакуумная энергия при этом равна нулю для закрытой и псевдоевклидовой моделей, так как в этих случаях точка $f = 0$, $\dot{f} = 0$ является устойчивой точкой на фазовой плоскости решения уравнения.

Рассмотрим случай, когда константа самодействия скалярного поля может быть отрицательна, т. е. $\lambda < 0$. Выпишем интеграл потенциальной энергии уравнения безмассового скалярного поля:

$$P_f = kf^2/2 - f^4/4.$$

Построив график функции P_f , можно увидеть, что точка $f = 0$ в закрытой модели, т. е. $k = +1$, представляет собой устойчивый локальный минимум P_f , а поэтому соответствующий вакуум метастабилен. В точках $f = \pm 1$ находятся неустойчивые локальные максимумы P_f , и никакого спонтанного нарушения в закрытой модели Вселенной не реализуется. Из формулы для P_f ясно, что при $\lambda < 0$ в квазиевклидовой и открытой модели нет устойчивого вакуума в случае безмассового поля или при $m^2 < 0$. Физически это означает, что в открытой или квазиевклидовой модели Вселенной не могут существовать бозоны нулевой и мнимой масс, если $\lambda < 0$.

5.4. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ

В настоящее время одной из наиболее привлекательных идей образования материи во Вселенной является идея рождения вещества в нестационарном гравитационном поле [1]. Задачу рождения частиц во внешнем гравитационном поле исследовали многие авторы (см., например, [137]), причем результаты до сих пор весьма противоречивы, и нет единого мнения относительно того, рождаются ли эти частицы (определяемые тоже разными способами) почти мгновенно вблизи сингулярности или же рождаются с различной скоростью в процессе расширения. Различны выводы и относительно рождения безмассовых частиц в космологических метриках, поскольку они зависят как от вида уравнения скалярного поля, так и от выбора метрического или канонического тензора энергии-импульса скалярного поля. Обычно с помощью конформных преобразований к статической (плоской) метрике уравнения Пенроуза доказывается, что безмассовые частицы не

рождаются. Однако такой прием нельзя использовать даже в задачах в заданном поле, так как он означает изменение или ликвидацию самого гравитационного поля, и задача теряет всякий смысл. На самом деле надо решать самосогласованную задачу в какой-либо модификации уравнений Эйнштейна, так как классические уравнения ОТО несовместимы с рождением частиц (Я. Б. Зельдович [137]). Тогда метрика определится однозначно, осуществлять конформные преобразования будет бессмысленно, так как ни уравнения Эйнштейна, ни большинство их модификаций не являются конформно-инвариантными. Поэтому задачу о рождении частиц в заданном поле надо решать во вполне конкретной («реальной») космологической метрике.

Одной из актуальных тем на стыке теории гравитации и физики микромира является проблема самосогласованного учета рождения частиц в гравитационном поле Метагалактики. Заманчивой представляется идея получения всей наблюдаемой массы за счет этого процесса. В работе [24] эта идея рассмотрена в рамках гипотезы о гравитационном вакууме, состоящем из планкеонов, и объяснены некоторые эмпирические связи между ФК. Основные выводы [24] подтверждены в [126], где для оценки плотности рождающихся частиц использовались обычные методы квантовой теории скалярного поля в изотропном мире.

В ОТО задача о самосогласованном учете рождения фермионов в закрытой модели ставилась в [138], где сделан вывод, что около 90% всей материи во Вселенной могло образоваться в этом процессе, однако при весьма узком выборе начальных условий. Результаты [138] были модифицированы на случай скалярно-тензорной теории Иордана—Бранса—Дикке в [139]. В [138, 139] рождение частиц рассмотрено как некогерентное, т. е. вычислена скорость их рождения из вакуума в каждый момент времени. Это мотивировано слабостью взаимодействия частиц, начиная с самых ранних стадий расширения Вселенной.

Возможно, гипотеза некогерентности нуждается в модификации, направленной на учет гравитационного поля уже родившихся частиц. В связи с этим выдвинута «гипотеза свободного объема» [140], в силу которой рождение происходит, действительно, только из вакуума. Модифицированная гипотеза некогерентности позволяет получить космологические модели с учетом рождения частиц, совместимые с наблюдаемыми значениями постоянной Хаббла, средней плотности вещества и возраста Вселенной. Достоинством этих моделей является полученный результат о независимости (в отличие от [138]) плотности вещества и возраста Вселенной от конкретного выбора фермионной массы. Поэтому можно полагать, что учет спектра масс всех фермионов, стабильных и нестабильных (распадающихся на стабильные частицы), не приведет к существенному изменению этих результатов. Попытки построения самосогласованных космологических моделей с учетом поляризации вакуума и рождения частиц предпринимались также в [141] в рамках учета квадратичных поправок, обусловленных квантовыми эффектами.

В § 5.4—5.6 мы последовательно остановимся на основных результатах упомянутых выше работ.

Модель вакуума. Согласно [24] вакуум состоит из фундаментальных частиц — планкеонов [11]. В статическом случае планкеоны представляют собой замкнутые микровселенные, для которых в силу уравнений гравитации кривизна $R_L \sim 1/L^2$ и $\varepsilon_L \sim R/\kappa \sim 6/\kappa L^2$ [6]. Внешний нестационарный гравитационный фон Метагалактики приводит к возбуждению этих частиц. В предположении, что фон описывается квазиевклидовой моделью с линейным законом расширения: $R_\phi \sim 6/a^2$ и $\varepsilon_\phi \sim R_\phi/\kappa \sim 1/\kappa a^2$, для доли энергии, высвобождающейся из одного планкеона при его возбуждении, имеем:

$$(\Delta E_L)/E_L \sim \Delta \varepsilon_L/\varepsilon_L \sim (L/a)^2. \quad (5.40)$$

Полное число этих виртуальных планкеонов N_L можно оценить как $N_L \sim (a/L)^3$, тогда полная энергия высвободившейся за все время материи $E = \Delta E_L N_L \sim E_L (a/L) = Mc^2$, где $Mc^2 = (4/3) \pi \varepsilon_\phi a^3$. Здесь использовано соотношение

$$2GM/c^2 a \approx 1, \quad (5.41)$$

которое для данной модели является следствием уравнений Эйнштейна (свертка) и определения полной массы. В предположении, что полная энергия различных видов рождающейся материи во Вселенной одинакова, получаем следующие оценки чисел гравитонов и реальных планкеонов (в отличие от виртуальных вакуумных):

$$E_g \sim \hbar c/a; N_g = E/E_g \sim c^3 a^2 / 2G\hbar \sim (a/L)^2 \sim 10^{120}; n_g \sim (L^2 a)^{-1}; \quad (5.42)$$

$$E_L \sim \hbar c/L; N_L \sim E/E_L \sim \frac{c^3 a L}{G\hbar} \sim (a/L) \sim 10^{60}; n_L \sim (L a^2)^{-1}. \quad (5.43)$$

Реальные планкеоны не должны быть устойчивы ввиду большой разницы гравитационных давлений (плотностей энергии) — внутреннего и внешнего, равного давлению Метагалактики. Они должны распадаться на квантовые частицы, для которых эти давления одинаковы [24]. С помощью этого условия определим их параметры:

$$GM^2/a^4 = Gm^2/\lambda^4.$$

Отсюда следует соотношение Дирака $N_\lambda \sim M/m \sim (a/\lambda)^2$, а с учетом (5.41) и соотношения $mc\lambda \sim \hbar$ получаем: $\lambda^3 \sim L^2 a$; $m_\lambda \sim M (L/a)^{4/3} \sim 10^{-25}$ г, $\lambda \sim 10^{-13}$ см. Таким образом, в конечном итоге должны образоваться (скалярные) гравитоны, масса которых эволюционирует от планковской в момент $t_0 = L/c$ до современного значения $m_g \sim 10^{-66}$ г, и нуклоны, образующиеся из распадающихся планкеонов, со значением масс в настоящее время $m_\lambda \sim 10^{-25}$ г. Подчеркнем, что в данной модели постоянными ФК (масштабами) являются c , $\hbar$, G (или планковские длина, масса и время), а массы всех частиц, кроме планкеонов, эволюционируют вместе с самой Метагалактикой. Полная масса растет как a по мере высвобождения энергии из вакуумных планкеонов в процессе расширения Вселенной. Отметим, что рождение материи согласно выражению (5.40) наиболее интенсивно при $a \sim L$, а затем с ростом a ослабевает.

Квантование вещественного скалярного поля в конформно-плоской метрике методом гармонического осциллятора [126]. Попробуем получить основные результаты этой модели в рамках более строгого подхода. Будем рассматривать рождение квантов безмассового вещественного скалярного поля с минимальной связью в нестационарной конформно-плоской метрике:

$$ds^2 = a^2(\tau) (d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2); a(\tau) = L \exp \tau. \quad (5.44)$$

Выбор минимального радиуса L соответствует результатам [128, 129] и общей концепции об отсутствии сингулярности при учете квантовых свойств материи.

Интеграл действия запишем так:

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x; \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} c^2 \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} \right) = \frac{(ac)^2}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 - (\nabla \psi)^2 \right]. \quad (5.45)$$

В метрике (5.44) уравнение скалярного поля имеет вид:

$$\partial^2 \psi / \partial \tau^2 + (2\dot{a}/a) \partial \psi / \partial \tau - \Delta \psi = 0.$$

Далее переходим к каноническому гамильтониану, раскладываем решения ψ по плоским волнам, записываем стандартные коммутационные соотношения.

Канонически-сопряженный импульс определяется обычным образом:

$$\pi = (\partial / \partial \dot{\psi}) (\mathcal{L} \sqrt{-g}) = c^2 a^2 \partial \psi / \partial \tau,$$

а канонический гамильтониан

$$H = \int \mathcal{H} d^3x; \quad \mathcal{H} = \pi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \mathcal{L} \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2 a^2} \pi^2 + c^2 a^2 (\nabla \psi)^2 \right).$$

Раскладываем решение по плоским волнам:

$$\psi(x) = V_0^{-1/2} \sum_k q_k \exp(ikx), \quad q_{-k} = q_k^+;$$

$$\pi(x) = V_0^{-1/2} \sum_k p_k \exp(-ikx), \quad p_{-k} = p_k^+.$$

Здесь V_0 — безразмерный объем в начальный момент $\tau = 0$; k и x — безразмерные 3-векторы. Коммутационные соотношения в k - и x -представлениях следующие:

$$[q_k, p_{k'}] = q_k p_{k'} - p_{k'} q_k = i\hbar \delta_{kk'};$$

$$[q_k, q_{k'}] = [p_k, p_{k'}] = 0; \quad [\psi(x), \pi(x')] = i\hbar \delta^3(x - x'),$$

где $\delta(x) = \frac{1}{V_0} \sum_k \exp(ikx)$. Гамильтониан в терминах операторов q_k

и p_k записывается так:

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \frac{1}{2c^2 a^2} \sum_k p_k^+ p_k + \frac{1}{2} c^2 \lambda^2 \sum_k k^2 q_k^+ q_k. \quad (5.46)$$

Перейдем к вещественным амплитудам:

$$Q_{kc} = (1/\sqrt{2})(q_k + q_k^+); \quad Q_{ks} = (1/i\sqrt{2})(q_k - q_k^+);$$

$$P_{kc} = (1/\sqrt{2})(p_k + p_k^+); \quad P_{ks} = -(1/i\sqrt{2})(p_k - p_k^+).$$

Для них

$$[Q_{k\alpha}, p_{k'\alpha'}] = i\hbar \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'}; \quad \alpha, \alpha' = c, s,$$

Тогда

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2V_0}} \sum_k [Q_{kc} \cos(kx) - Q_{ks} \sin(kx)];$$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2V_0}} \sum_k [P_{kc} \cos(kx) - P_{ks} \sin(kx)],$$

и в терминах вещественных амплитуд гамильтониан $H = \sum_{k, \alpha} H_{k\alpha}$, где

$$H_{k, \alpha} = p_{k\alpha}^2/2M + (1/2) M k^2 Q_{k\alpha}^2; \quad M = (ca)^2; \quad (5.47)$$

k — безразмерное волновое число; $\alpha = 1, 2$.

Мы приходим к задаче о квантовании гармонического осциллятора с переменной массой и частотой [142]. Уравнения Гейзенберга

$$i\hbar \dot{Q}_{kc} = [Q_{kc}, H]; \quad i\hbar \dot{P}_{kc} = [P_{kc}, H]$$

сводятся к виду

$$\dot{Q}_{kc} = (1/M) P_{kc}; \quad \dot{P}_{kc} = -k^2 M Q_{kc}.$$

Аналогично из

$$i\hbar \dot{Q}_{ks} = [Q_{ks}, H], \quad i\hbar \dot{P}_{ks} = [P_{ks}, H]$$

следует:

$$\dot{Q}_{ks} = (1/M) P_{ks}; \quad \dot{P}_{ks} = -k^2 M Q_{ks}.$$

Как видно, уравнения движения для $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$ получились такими же, как и уравнения движения для этих же величин с гамильтонианом $H_{k\alpha}$. Если положить

$$d\tau = M d\eta = a^2 d\eta; \quad v = kM, \quad (5.48)$$

то уравнения движения примут вид:

$$dQ_{k\alpha}/d\eta = P_{k\alpha}; \quad dP_{k\alpha}/d\eta = -v^2 Q_{k\alpha},$$

т. е. вид уравнений движения для $Q_{k\alpha}$, $P_{k\alpha}$ с гамильтонианом

$$H_{k\alpha} = (1/2) [P_{k\alpha}^2 + v^2(\eta) Q_{k\alpha}^2].$$

Подстановкой (5.48) гамильтониан (5.47) сводится к

$$H(\eta) = (1/2) [P^2 + v^2(\eta) Q^2].$$

Пусть $\nu(\eta)$ при $\eta = \eta_-$ и $\eta = \eta_+ > \eta_-$ принимает значение ν_- и ν_+ . Рассмотрим движение осциллятора с гамильтонианом $H(\eta)$ на отрезке $\eta_- \leq \eta \leq \eta_+$. Введем операторы рождения и уничтожения $a^+(\eta_{\pm})$ и $a(\eta_{\pm})$, отвечающие частотам $\nu_{\pm}$ и удовлетворяющие коммутационным соотношениям $aa^+ - a^+a = 1$. Обозначим $|n_{\pm}\rangle$ ($n_{\pm} = 0, 1, 2, \dots$) собственные функции гамильтонианов $H(\nu_{\pm})$ в представлении чисел заполнения $n_{\pm}$. Пусть при $\eta = \eta_-$ осциллятор находится в невозбужденном состоянии $|0\rangle$. Тогда в момент $\eta = \eta_+$ его состоянием будет $\hat{S}(\eta_+) |0\rangle$, где $i\hbar \partial \hat{S} / \partial \eta = H(\eta) \hat{S}$, $\hat{S}(\eta_-) = 1$. Среднее число квантов возбуждения осциллятора в момент η_+ , равно

$$\begin{aligned} N(\eta_+) &= \sum_{n_+=0}^{\infty} n_+ |\langle n_+ | \hat{S}(\eta_+) | n_- \rangle|^2 = \\ &= \sum_{n_+} \langle n_- | \hat{S}^+(\eta_+) | n_+ \rangle n_+ \langle n_+ | \hat{S}(\eta_+) | n_- \rangle = \\ &= \langle n_- | \hat{S}(\eta_+) a^+(\nu_+) a(\nu_+) \hat{S}(\eta_+) | n_- \rangle. \end{aligned}$$

Обозначим $a(\eta, \nu_+) = \hat{S}^+(\eta) a(\nu_+) \hat{S}(\eta)$. Тогда

$$N(\eta_+) = \langle n_- | a^+(\eta_+, \nu_+) a(\eta_+, \nu_+) | n_- \rangle.$$

Операторы $a(\nu_+)$, $a^+(\nu_+)$ выражаются через $a(\nu_-)$, $a^+(\nu_-)$ преобразованием

$$\begin{aligned} a(\nu_+) &= u'' a(\nu_-) + v'' a^+(\nu_-); \\ a^+(\nu_+) &= v'' a(\nu_-) + u'' a^+(\nu_-), \end{aligned}$$

где $u'' = (\nu_+ + \nu_-)/2 \sqrt{\nu_+ \nu_-}$; $v'' = (\nu_+ - \nu_-)/\sqrt{2\nu_+ \nu_-}$.

Отсюда, если обозначить $a(\eta, \nu_-) = \hat{S}^+(\eta) a(\nu_-) \hat{S}(\eta)$:

$$\begin{aligned} a(\eta, \nu_+) &= u'' a(\eta, \nu_-) + v'' a^+(\eta, \nu_-); \\ a^+(\eta, \nu_+) &= v'' a(\eta, \nu_-) + u'' a^+(\eta, \nu_-). \end{aligned}$$

Оператор $a(\eta, \nu_-)$ сводится к виду

$$a(\eta, \nu_-) = (1/\sqrt{2\hbar\nu_-}) [\nu_- Q(\eta) + iP(\eta)],$$

где

$$dQ/d\eta = P; \quad dP/d\eta = -\nu^2(\eta) Q; \quad Q(\eta_-) = Q; \quad P(\eta_-) = P.]$$

Иначе:

$$d^2Q/d\eta^2 + \nu^2(\eta) Q = 0; \quad Q(\eta_-) = Q; \quad dQ/d\eta|_{\eta=\eta_-} = P.$$

Пусть $\xi(\eta)$ — классическое решение уравнения

$$d^2\xi/d\eta^2 + \nu^2(\eta) \xi = 0; \quad \xi(\eta_-) = 1; \quad d\xi/d\eta|_{\eta=\eta_-} = i\nu_-.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a(\eta, \nu_-) &= u' a(\nu_-) + v' a^+(\nu_-); \\ a^+(\eta, \nu_-) &= v'^* a(\nu_-) + u'^* a^+(\nu_-). \end{aligned}$$

Здесь

$$u'(\eta) = \frac{1}{2} \left(\xi^* + \frac{i}{v_-} \frac{d\xi^*}{d\eta} \right); \quad v'(\eta) = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{i}{v_-} \frac{d\xi}{d\eta} \right).$$

Перемножая матрицы

$$\begin{pmatrix} u'' & v'' \\ v'' & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' & v' \\ v'^* & u'^* \end{pmatrix},$$

находим:

$$\begin{aligned} a(\eta, v_+) &= ua(v_-) + va^+(v_-); \\ a^+(\eta, v_+) &= v^* a(v_-) + u^* a^+(v_-), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_+}{v_-}} \left(\xi^* + \frac{i}{v_+} \frac{d\xi^*}{d\eta} \right); \\ v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_+}{v_-}} \left(\xi + \frac{i}{v_+} \frac{d\xi}{d\eta} \right). \end{aligned}$$

Содержащийся в выражении для $N(\eta_+)$ оператор

$$\begin{aligned} a^+(\eta, v_+) a(\eta, v_+) &= |u|^2 a^+(v_-) a(v_-) + |v|^2 a(v_-) a^+(v_-) + v^* \times \\ &\times ua(v_-) a(v_-) + u^* va^+(v_-) a^+(v_-), \end{aligned}$$

где $a(v_-) a^+(v_-) = 1 + a^+(v_-) a(v_-)$.

Пусть начальное состояние осциллятора $|n_- \rangle = |0_- \rangle$, тогда

$$N(\eta_+) = |v(\eta_+)|^2 = \frac{1}{4} \frac{v_+}{v_-} \left| \xi(\eta_+) + \frac{i}{v_+} \frac{d\xi}{d\eta_+} \right|^2.$$

Вернемся к переменной τ :

$$\left. \begin{aligned} N_{k\alpha}(\tau_+) &= \frac{1}{4} \frac{a^2(\tau_+)}{a^2(\tau_-)} \left| \xi_k(\tau_+) + \frac{i}{k} \frac{d\xi_k}{d\tau_+} \right|^2; \\ d^2\xi_k/d\tau^2 + (2\dot{a}/a) d\xi_k/d\tau + k^2 \xi_k &= 0; \\ \xi_k(\tau_-) &= 1; \quad d\xi_k/d\tau_- = ik. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Число частиц, рождающихся с волновым числом k , равно

$$N_k(\tau_+) = \sum_{\alpha=c,s} N_{k\alpha}(\tau_+).$$

Принимая $\tau_+ \rightarrow \tau$, $\tau_- \rightarrow \tau_0$, $a(\tau_-) \rightarrow a_0$, получаем число частиц с волновым числом k :

$$N_k(\tau) = \frac{1}{2} \frac{a^2(\tau)}{a_0^2} \left| \xi_k(\tau) + \frac{i}{k} \frac{d\xi_k}{d\tau} \right|^2.$$

Полное число рождающихся частиц равно сумме N_k по всем волновым числам:

$$N = \sum_k N_k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int N_k d^3k = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty N_k k^2 dk.$$

Величины τ, x, y, z, V, k безразмерны. Полагая $V = V_{\text{разм}}/a^3(\tau)$, получаем

$$\frac{N(\tau)}{V_{\text{разм}}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{a^3(\tau)} \int_0^\infty N_k k^2 dk.$$

Вычислим плотность числа рожденных квантов скалярного поля для $a = L \exp \tau$. При этом

$$N_k(\tau) = [\exp(2\tau)/4] |\xi(\tau) + (i/k) d\xi/d\tau|^2,$$

где

$$d^2\xi/d\tau^2 + 2d\xi/d\tau + k^2\xi = 0;$$

$$\xi(0) = 1; \quad d\xi/d\tau(0) = ik.$$

Находим

$$N_k(\tau) = \begin{cases} \frac{\text{sh}^2(\sqrt{1-k^2}\tau)}{1-k^2}, & k \leq 1; \\ \frac{\sin^2(\sqrt{k^2-1}\tau)}{k^2-1}, & k \geq 1. \end{cases}$$

Полное число рожденных к моменту τ квантов

$$N(\tau) = \sum_k N_k(\tau) = [V_0/(2\pi)^3] \int N_k(\tau) d^3k,$$

где начальный безразмерный объем $V_0 = 1$. Вводим объем в момент τ , равный $V = a^3(\tau) V_0 = a^3(\tau)$. Тогда

$$\rho(\tau) = \frac{N(\tau)}{a^3(\tau)} = \frac{1}{(2\pi)^3 a^3(\tau)} \int N_k(\tau) d^3k = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int N_k(\tau) k^2 dk.$$

Запишем:

$$\rho(\tau) = \rho_{k<1}(\tau) + \rho_{k>1}(\tau),$$

где

$$\rho_{k<1}(\tau) = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int_0^1 \frac{k^2}{1-k^2} \text{sh}^2(\sqrt{1-k^2}\tau) dk;$$

$$\rho_{k>1}(\tau) = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \int_1^{k_{\text{макс}}} \frac{k^2}{k^2-1} \sin^2(\sqrt{k^2-1}\tau) dk.$$

Параметр обрезания полагаем равным $k_{\text{макс}} = a/L$, так как мы вычисляем современное значение массы ($a_{\text{макс}} = a_{\text{совр}}$). Интеграл

$$\int_0^1 \frac{k^2}{1-k^2} \text{sh}^2(\sqrt{1-k^2}\tau) dk \approx \frac{\sqrt{\pi} \exp(2\tau)}{16\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty,$$

отсюда

$$\rho_{k < 1}(\tau) = \frac{1}{2\pi^2 a^3} \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{\exp(2\tau)}{\tau^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{32\pi^2} \frac{1}{[\ln(a/L)]^{3/2}} (aL^2)^{-1} \sim (aL^2)^{-1}.$$

Второй интеграл оценивается следующим образом:

$$\int_0^{k_{\text{макс}}} \frac{k^2 dk}{k^2 - 1} \sin^2(\sqrt{k^2 - 1} \tau) \approx \int_0^{k_{\text{макс}}} \sin^2(k\tau) dk \approx \frac{k_{\text{макс}}}{2} = \frac{a}{L}.$$

Это дает

$$\rho_{k > 1}(\tau) \approx (1/4\pi^2) (La^2)^{-1}.$$

Таким образом, мы снова приходим к формулам (5.42) и (5.43) для плотности числа частиц газа гравитонов и газа планкеонов в рамках качественной модели вакуума. Обрезание интегралов на больших и малых расстояниях физически вполне оправдано, так как L — минимальный радиус, до которого имеет еще смысл говорить о классическом гравитационном поле, а a — современное значение радиуса, которое следует из наблюдений.

Связь с методом диагонализации гамильтониана. Исходим из представления поля $\psi(x)$ в виде суперпозиции бегущих волн:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k \exp(ikx).$$

Полагаем здесь

$$q_k = \sqrt{\hbar/2k} [\psi_k(\tau) a_k + \psi_k^*(\tau) a_{-k}^+],$$

где $\ddot{\psi}_k + (2\dot{a}/a)\dot{\psi}_k + k^2\psi_k = 0$; $\psi_k(0) = a_0^{-1}$; $\dot{\psi}_k(0) = -ika_0^{-1}$. Очевидно, $\psi_k(\tau)$ — четная функция от вектора k . При этом

$$q_{-k} = \sqrt{\hbar/2k} [\psi_k(\tau) a_{-k} + \psi_k^*(\tau) a_k^+]; \quad q_{-k}^+ = q_k.$$

Известно, что

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p_k \exp(-ikx) = a^2 \dot{\psi},$$

поэтому полагаем

$$p_k = a^2 \sqrt{\hbar/2k} [\dot{\psi}_k(\tau) a_k + \dot{\psi}_k^*(\tau) a_{-k}^+].$$

Накладываем условия коммутации

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0; \quad [a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}.$$

При этом

$$[q_k, p_{k'}] = a^2 (\hbar/2k) (\psi_k \dot{\psi}_{k'}^* - \psi_{k'}^* \dot{\psi}_k) \delta_{kk'} = i\hbar \delta_{kk'},$$

в силу того, что

$$(d/d\tau) (\psi_k \dot{\psi}_{k'}^* - \psi_{k'}^* \dot{\psi}_k) = -(2\dot{a}/a) (\psi_k \dot{\psi}_{k'}^* - \psi_{k'}^* \dot{\psi}_k);$$

$$a^2 (\psi_k \dot{\psi}_{k'}^* - \psi_{k'}^* \dot{\psi}_k) = \text{const} = i2k,$$

Гамильтониан (5.46) преобразуется к виду

$$H = \frac{1}{4} \hbar a^2 \sum_k [E_k(\tau) (a_k a_k^+ + a_{-k}^+ a_{-k}) + F_k(\tau) a_k a_{-k} + F_k^*(\tau) a_{-k}^+ a_k^+].$$

Здесь

$$E_k(\tau) = (1/k) (|\dot{\psi}_k|^2 + k^2 |\psi_k|^2);$$

$$F_k(\tau) = (1/k) (\dot{\psi}_k^2 + k^2 \psi_k^2)$$

— четные функции от k .

Каноническое преобразование Боголюбова, диагонализующее H , ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} a_k &= (1/\sqrt{1-|\lambda_k|^2}) (b_k + \lambda_k^* b_{-k}^+); \\ a_k^+ &= (1/\sqrt{1-|\lambda_k|^2}) (b_k^+ + \lambda_k b_{-k}); \\ [b_k, b_{k'}^+] &= \delta_{kk'}, \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

где λ_k — четная функция от k . Непосредственная проверка показывает, что при этом

$$[a_k, a_{k'}] = 0; [a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'},$$

как и должно быть при каноническом преобразовании. Подстановкой в выражение для H получаем

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{4} \hbar a^2 \sum_k \frac{1}{1-|\lambda_k|^2} \{ & (b_k b_k^+ + b_{-k}^+ b_{-k}) [E_k(1+|\lambda_k|^2) + F_k \lambda_k^* + \\ & + F_k^* \lambda_k] + b_k b_{-k} (E_k \cdot 2\lambda_k + F_k + F_k^* \lambda_k^2) + b_{-k}^+ b_k^+ (E_k \cdot 2\lambda_k^* + \\ & + F_k^* + F_k \lambda_k^{*2}) \}. \end{aligned}$$

Диагонализация заключается в «уничтожении» недиагональных членов с $b_k b_{-k}$, $b_{-k}^+ b_k^+$. Полагаем $E_k 2\lambda_k + F_k + F_k^* \lambda_k^2 = 0$. Отсюда

$$\lambda_k = (-E_k + \sqrt{E_k^2 - |F_k|^2})/F_k^*.$$

Выражая операторы $b_k^\pm$ через $a_k^\pm$, находим

$$b_{-k}^+ b_{-k} = [1/(1-|\lambda_k|^2)] (a_{-k}^+ a_{-k} - \lambda_k^* a_{-k}^+ a_k^+ - \lambda_k a_k a_{-k} + |\lambda_k|^2 a_k a_k^+).$$

Обозначим $|0\rangle$ вакуумный вектор оператора a_k : $a_k |0\rangle = 0$. Среднее

$$\langle 0 | b_{-k}^+ b_{-k} | 0 \rangle = |\lambda_k|^2 / (1 - |\lambda_k|^2).$$

После алгебраического преобразования правой части получаем

$$N_{k\alpha}(\tau) = \langle 0 | b_{-k}^+ b_{-k} | 0 \rangle = (1/4) (a^2(\tau)/a_0^2) |\xi_k(\tau) + (i/k) d\xi_k(\tau)/d\tau|^2.$$

Здесь

$$\xi_k(\tau) = a_0 \psi_k^*(\tau);$$

$$\ddot{\xi}_k + (2\dot{a}/a) \dot{\xi}_k + k^2 \xi_k = 0;$$

$$\xi_k(0) = 1; \dot{\xi}_k(0) = ik,$$

т. е. получим формулу (5.49) для $N_{k\alpha}(\tau)$.

Таким образом, метод гармонического осциллятора и метод диагонализации гамильтониана приводят к одинаковым результатам.

5.5. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С НЕКОГЕРЕНТНЫМ РОЖДЕНИЕМ ФЕРМИОНОВ [140]

Остановимся на некоторых моделях, в которых делается попытка объяснить происхождение массы всей наблюдаемой материи за счет рождения пар частиц в нестационарном гравитационном поле в самосогласованной схеме уравнений теории гравитации и физических полей.

Гипотеза некогерентности. В связи с тем, что основной вклад в массу Вселенной дают нуклоны, мы будем рассматривать рождение лишь фермионов. В заданной нестационарной метрике изотропной космологической модели

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) [d\chi^2 + f_k(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (5.51)$$

($k = 1, 0, -1$; $f_k = \sin \chi, \chi, \operatorname{sh} \chi$ соответственно для закрытой, квази-евклидовой и гиперболической моделей) согласно [143] число рожденных из вакуума частиц и античастиц в единичном координатном объеме $dV = f_k^2 \sin \theta d\chi d\theta d\varphi$ определяется формулой

$$N_V(\tau) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{k}{4} \right) |\beta_\lambda|^2, \quad (5.52)$$

где $|\beta_\lambda|^2$ — вероятность рождения частицы с импульсом λ в единичном физическом объеме $dV_\phi = a^3 dV$. Если $k = 1$, то необходимо заменить интеграл суммой по λ от 1 до ∞ .

Предположим (используется система единиц $c = \hbar = 1$), что:

1) в некоторый момент времени $\tau = \tau_0$ состояние ферми-поля является вакуумным;

2) $ma_0(\tau_0) \gg 1$, где m — масса частицы, т. е. не рассматриваются очень ранние этапы расширения Вселенной;

3) постоянная Хаббла $H \stackrel{\text{def}}{=} (1/a) da/dt \ll m$ (медленное расширение в масштабах комптоновского времени, адиабатический режим);

4) рассматриваются моменты времени τ , достаточно близкие к τ_0 , так что $\tau - \tau_0 \ll H^{-1}$, причем H можно считать постоянным (расширение принимается линейным на отрезке $\tau - \tau_0$, малом по сравнению с возрастом Вселенной).

При этих предположениях в согласии с [143]

$$N_V(\tau) = (H^2 m a^3 / 2\pi^2) I(B), \quad (5.53)$$

$$I(B) = \int_1^\infty \frac{(x^2 - 1)^{3/2}}{x^5} \sin^2(Bx) dx,$$

где $B = m(\tau - \tau_0)$ — отношение времени $\tau - \tau_0$ к комптоновскому времени $1/m$. В данной схеме m — эмпирический параметр, который, по крайней мере, не должен быть больше планковской массы.

Согласно (5.53) наиболее интенсивное рождение частиц происходит на временах $\tau - \tau_0$ порядка $1/m$, а в дальнейшем рождение почти полностью компенсируется поглощением. Поле Метагалактики как бы мгновенно реагирует на рождение малого числа частиц, хотя «информация» о каждой из них могла распространяться за это время лишь на

расстояние порядка комптоновской длины волны. Поэтому представляется правдоподобным, что формула (5.53) правильно описывает рождение из вакуума лишь за время порядка $(\tau - \tau_0) \sim 1/m$, далее рождение частиц продолжается снова из вакуума (гипотеза некогерентности). Как и в [138], будем считать, что уничтожение уже родившихся частиц подавлено за счет распада нестабильных частиц и рассеяния. Таким образом, формула (5.53) дает прирост числа частиц за время $\Delta\tau \sim 1/m$: $\Delta N_V = N_V(\tau_0 + \Delta\tau)$, где $N_V(\tau_0) = 0$.

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга время рождения частицы с массой m — также порядка $1/m$. Таким образом, можно ввести [138] скорость рождения частиц с учетом немгновенного характера рождения:

$$dN_V/d\tau \approx \Delta N/\Delta\tau, \quad \Delta\tau = m^{-1}. \quad (5.54)$$

Замена отношения конечных разностей производной оправдывается с большой точностью при принятых предположениях 1—4. Из формул (5.53), (5.54) следует, что

$$\dot{N}_V \equiv dN_V/d\tau = (m^2 a / 4\pi^2) \dot{a}^2 I(1), \quad I(1) \approx 0,345. \quad (5.55)$$

Рождающимся частицам соответствует тензор энергии-импульса T_μ^ν , который формально расходится. Регуляризация при $ma \gg 1$ приводит (вследствие большей вероятности рождения частиц с малым импульсом) к выражению для плотности энергии $\rho = T_0^0 = mN_V/a^3$, соответствующему газу невзаимодействующих частиц [144]. Подставляя это выражение в уравнения Эйнштейна [компонента $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$], получаем:

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= (\kappa m / 3a) N_V - k + U, \\ U &= (\Lambda / 3) a^2 + (\kappa a^2 / 3) \rho', \end{aligned} \quad (5.56)$$

где Λ — космологическая постоянная; ρ' — плотность энергии остального вещества (кроме родившихся фермионов). В силу уравнений Эйнштейна тензор T_μ^ν должен быть консервативен, $\nabla_\alpha T_\mu^\alpha = 0$, откуда можно получить выражение для эффективного давления рождающихся частиц:

$$p = -m\dot{N}_V / 3a^2 H < 0. \quad (5.57)$$

Подстановка (5.56) в (5.55) дает

$$\dot{N}_V = \frac{m^2 a}{4\pi} I(1) \left[\frac{\kappa m}{3a} N_V - k + U \right]. \quad (5.58)$$

Первый член в правой части уравнений (5.56) и (5.58), как нетрудно убедиться, доминирует при больших a . Пренебрегая остальными членами, приходим к следующему асимптотическому решению:

$$N_V = N_{V0} \exp(\tau/a^*), \quad N_{V0} = \text{const}; \quad (5.59)$$

$$a = a^{*2/3} (3\kappa m N_{V0})^{1/3} \exp(\tau/3a^*), \quad (5.60)$$

где $a^* = 6\pi^2 [\kappa m^3 / (1)]^{-1} \approx 2,3 \cdot 10^{25}$ см, если $m = m_p \approx 4,8 \cdot 10^{13}$ см⁻¹ (масса протона в системе $c = \hbar = 1$). При этом постоянная Хаббла и плотность рожденного вещества принимают стационарные значения:

$$H = 1/3a^* \approx 1,3 \cdot 10^4 \text{ км/(с} \cdot \text{Мпк)}; \quad (5.61)$$

$$\rho = 1/3\kappa a^* \approx 1,3 \cdot 10^4 \text{ г/см}^3. \quad (5.62)$$

Эти значения существенно больше наблюдаемых в настоящее время ($H \approx 55$ км/(с·Мпк), $\rho \sim 10^{-30}$ г/см³).

Такова асимптотика при больших a для моделей всех трех типов ($k = 0, \pm 1$) и произвольного вида U . Избежать этого неудовлетворительного поведения модели можно лишь при отрицательных значениях членов в правой части выражения (5.56) для $\dot{a}^2$, которые могут привести к решениям с ограниченным сверху a (τ) [асимптотики (5.59), (5.60) тогда не существует]. Это возможно либо при $\Lambda < 0$, либо при $k = 1$. Последний случай при $U = 0$ исследован в [138], где для весьма узкого класса начальных данных получены модели, согласующиеся с результатами наблюдений. Отметим, что в действительности этот класс еще более узок, так как в [138] выражение для скорости рождения в 8 раз меньше правильного. Рассмотрение же $\rho' > 0$ и (или) $\Lambda > 0$ может лишь увеличить ρ и H и тем самым усилить несоответствие с данными наблюдений.

Попытаемся избежать описанных трудностей, модифицируя гипотезу некогерентности.

Гипотеза свободного объема [140]. Согласно гипотезе некогерентности в течение всей эволюции Вселенной вещество рождается из вакуума вследствие нестационарности гравитационного поля. При этом игнорируется влияние уже существующих частиц. Попытаемся учесть это влияние, предполагая, что рождение из вакуума [см. (5.55)] происходит лишь в областях, где гравитационное поле Метагалактики сильнее, чем локальное статическое поле частиц. Интенсивность гравитационного поля характеризуется компонентами тензора Римана $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$. Космологическое поле имеет компоненты вида $H^2 = (\dot{a}/a)^2$, $\ddot{a}/a^3$, $1/a^2$; для того, чтобы характеризовать поле, естественно выбрать величину H^2 , которая как раз входит в формулу для числа рожденных частиц (5.53). Локальное поле частиц, для которого с хорошей точностью справедливо решение Шварцшильда, имеет компоненты вида r_g/r^3 , r_g^2/r^4 ($r_g = 2Gm$ — гравитационный радиус). Первая из этих величин при $r \gg r_g$ значительно больше второй. Таким образом, можно найти радиус r^* , на котором локальное поле частицы сравнивается с космологическим:

$$r^{*3} = 2Gm/H^2 \quad (5.63)$$

и эффективный объем «зоны влияния» частиц в единичном координатном объеме Вселенной (соответствующий физический объем равен a^3):

$$V^* = N_V (4\pi/3) r^{*3} = (8\pi/3) (GmN_V/H^2). \quad (5.64)$$

Итак, в выражения (5.55), (5.58) для $\dot{N}$ введем «коэффициент свободного объема» $(V - V^*)/V = 1 - V^*/a^3$ (гипотеза свободного объема). Тогда в формуле (5.58), как легко убедиться, исчезает член, содержащий N_V :

$$\dot{N}_V = (m^2 a / 2\pi^2) I(1) (-k + U). \quad (5.65)$$

Таким образом, устраняется «положительная обратная связь» в формуле (5.56), которая и приводит к экспоненциальному росту числа частиц на асимптотике. Обычно в динамических системах существование положительной обратной связи обусловлено неограниченным поступлением энергии. Отсутствие этой связи в нашем случае можно, по-видимому, интерпретировать как проявление «сохранения энергии» с учетом гравитационного поля (понимаемого интуитивно, так как строгого определения энергии гравитационного поля в ОТО не существует).

Конкретные модели [140]. Итак, космологические модели с учетом рождения частиц описываются уравнениями (5.56) и (5.65). Заметим, что условие (5.65) имеет смысл лишь при $-k + U \geq 0$.

Для выяснения общего характера получающихся моделей предположим, что

$$-k + U = f_0 a^{-n}, \quad n = \text{const}. \quad (5.66)$$

Случай $n = 0$ соответствует $k = -1$, $U = 0$ (гиперболическая модель без дополнительной, «затравочной», материи); $n = 1$ соответствует $k = 0$, $\rho' \sim a^{-3}$ (пылевидное затравочное вещество); $n = 2$ соответствует $k = 0$, $\rho' \sim a^{-4}$ (ультрарелятивистское затравочное вещество).

Система (5.56), (5.65) при условии (5.66) сводится к уравнению

$$2ah^2 h_a + h^3 - hf_0 (1 - n) a^n = (f_0/a^*) a^{1-n}, \quad (5.67)$$

$$h = h(a) \equiv \dot{a}.$$

Третий член в левой части исчезает при $n = 1$. Считая его малым и в других случаях, получаем

$$h^3 = [3f_0/a^* (5 - 2n)] [a^{1-n} + f_2 a^{-3/2}], \quad f_2 = \text{const}, \quad n \neq 5/2. \quad (5.68)$$

При $n < 5/2$ первый член доминирует при больших a , и, ограничиваясь им, получаем на асимптотике

$$a = f_3 \tau^{3/(n+2)}, \quad f_3 = \left[\frac{(n+2)^3 f_0}{9(5-2n) a^*} \right]^{1/(n+2)}, \quad (5.69)$$

откуда находим постоянную Хаббла и плотность:

$$H = 3/(n+2) \tau; \quad \rho = mN_V/a^3 =$$

$$= 3H^2/\kappa = 27/\kappa (n+2)^2 \tau^2. \quad (5.70)$$

При этом параметр замедления $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2 = (n-1)/3 = \text{const}$. Нетрудно убедиться теперь, что условие малости третьего члена в (5.67) выполнено при $\tau \gg a^*$, или $H^{-1} \gg a^*$. Таким образом, формулы (5.68)–(5.70) справедливы для современного этапа эволюции Все-

ленной при $n \neq 1$, а при $n = 1$ — при общих условиях применимости рассматриваемого подхода (по существу при $ta \gg 1$).

Подставив наблюдаемое значение $H = 55$ км/(с·Мпк), получаем $\rho \approx 5,5 \cdot 10^{-30}$ г/см³, что согласуется с данными наблюдений. Для возраста Вселенной имеем оценки:

$$\tau = [3/(n + 2)] \tau_H, \quad (5.71)$$

где $\tau_H = 1/H \approx 17 \cdot 10^9$ лет, что также не противоречит современным данным.

В моделях с $n \neq 0$ присутствует затравочное вещество. Оценим его плотность ρ' в современную эпоху по сравнению с плотностью ρ фермионного вещества, рожденного из вакуума. Из сравнения выражений (5.56) и (5.66) для U ($k = 0$) находим:

$$\rho'/\rho = (5 - 2n) H = \begin{cases} 1/675, & n = 1; \\ 1/2000 & n = 2. \end{cases} \quad (5.72)$$

Итак, при $n = 0$ ($k = -1$, гиперболическая модель) все вещество рождается нестационарным гравитационным полем, а в моделях с $n \neq 0$ доля необходимого затравочного вещества (пыль, излучение) в современную эпоху незначительна (ρ сравнивается с ρ' в моделях с $n \neq 0$ на временах порядка a^* , а именно при $\tau = [(5 - 2n)/(n + 2)] a^*$). Заметим, что при $k = -1$ вид решения для больших a сохраняется и при наличии затравочного вещества, так как тогда в уравнении (5.65) $U \ll -k + 1$. В моделях с затравочным веществом не обязательно понимать его как макроскопическое: им может быть, например, газ реликтовых скалярных частиц, фотонов или нейтрино. Интересно, в частности, что модель с $n = 2$ (излучение) требует как раз плотности затравочного вещества, соответствующей значению, наблюдаемому для реликтового электромагнитного фонового излучения, а в модели с $n = 1$ (пыль) выполняется так называемое соотношение Маха: $2GmN_V/a \sim 1$.

Наконец, заметим, что полученные модели лишь иллюстрируют возможный механизм образования вещества во Вселенной. В дальнейшем желательна конкретизация модели путем сопоставления со всеми известными космологическими тестами, в частности, по фоновому электромагнитному излучению, синтезу легких элементов, соотношениям звездная величина — красное смещение и др.

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ВАКУУМА

6.1. ПЛАНКЕОНЫ КАК МОДЕЛЬ ГРАВИТАЦИОННОГО ВАКУУМА

В. А. Амбарцумян [145] показал, что эволюция в Метагалактике в целом и в галактиках в отдельности происходит не от разреженного состояния к плотному (под влиянием сил гравитации), а наоборот, когда сверхплотное (дозвездное — по Амбарцумяну) вещество разре-

жается путем взрывов и последовательно образуются скопления галактик, сами галактики, скопления звезд и т. д.

Современные данные наблюдений подтверждают эту точку зрения. Б. А. Воронцов-Вельяминов [146], исследуя скопления галактик, также показал, что, несомненно, взрывные явления при их образовании имели место.

В [1, 22, 24, 80, 147] были созданы основы теории тяжелых «элементарных» частиц — планкеонов. Идея планкеона (см. § 5.4) заключается в том, что эти частицы представляют собой почти замкнутую микровселенную Эйнштейна. Вычислим объем этой микровселенной:

$$V = 4\pi \int_0^{a(1-\Delta a)} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1-r^2/a^2}} = 4\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^2 \chi d\chi, \quad (6.1)$$

где $r = a \sin \chi$; a — радиус кривизны эйнштейновской Вселенной; $\Delta \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$ характеризуют неполную замкнутость этой Вселенной.

Вычислив интеграл (6.1), найдем, что

$$V = \pi^2 a^3 [1 - 4\varepsilon/\pi + 4\varepsilon^3/3\pi - \dots]. \quad (6.2)$$

Невозмущенный объем $V_0 = \pi^2 a^3$, поэтому

$$\Delta V/V_0 = - (4/\pi) \varepsilon^3 (1 - \varepsilon^2/3). \quad (6.3)$$

Очевидно, можно представить $\Delta V/V_0$ в виде

$$\Delta V/V_0 = \Delta V_1/V_0 + \Delta V_3/V_0, \quad (6.4)$$

где $|\Delta V_1/V_0| = 4\varepsilon/\pi$; $\Delta V_3/V_0 = 4\varepsilon^3/3\pi$. При этом полагаем, что в первом приближении выделяется энергия

$$E_1/E_L = |\Delta V_1/V_0| = 4\varepsilon/\pi, \quad (6.5)$$

а во втором

$$E_3/E_L = \Delta V_3/V_0 = 4\varepsilon^3/3\pi, \quad (6.6)$$

где $E_L = c^2 \sqrt{\hbar/2G} = 10^{16}$ эрг — энергия планкеона. Массу $m_1 = E_1/c^2$ можно сопоставить массе нуклона, а массу $m_3 = E_3/c^2$ — массе гравитона. Тогда по определению

$$m_3/m_1 = L^2/\lambda^2 = \varepsilon^2, \quad (6.7)$$

откуда

$$\varepsilon = L/\lambda. \quad (6.8)$$

При этом

$$m_1 = (4\varepsilon/\pi) m_L = 4\hbar/\pi c \lambda; \quad (6.9)$$

$$m_3 = (4\varepsilon^2/3\pi) m_L = 16G\hbar^2/3\pi c^4 \lambda^3. \quad (6.10)$$

Из этих соотношений можно сделать важный вывод о том, что планкеон при флуктуациях, вызванных внешними причинами, испускает нуклон с массой m_1 и гравитон (один или несколько) с «массой» m_3 .

6.2. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ ИЗ ПЛАНКЕОННОГО ВАКУУМА

Попробуем совместить идеи § 6.1 о планкеонах с методами, используемыми в квантовой теории поля в искривленном пространстве, т. е. более детально попытаемся проследить процесс рождения частиц из вакуума. Будем считать, что гравитационный вакуум состоит из плотно упакованных виртуальных планкеонов, которые описываются метрикой Фридмана с радиусом кривизны порядка L . Далее предположим, что под влиянием внешнего поля Метагалактики эти планкеоны возбуждаются и излучают пары частиц в соответствии с законами квантовой теории. При этом волна возбуждения идет со скоростью света. На фронте волны кривизна терпит разрыв.

Аналогия с осциллятором. Рассмотрим сначала как модель этого процесса заряженный осциллятор, находящийся в основном состоянии, на который накладывается однородное электрическое поле [110]. Вероятность перехода в первое возбужденное состояние мала, но значительно превышает вероятности переходов в другие возбужденные состояния и задается формулой

$$W_{01} = x_0^2 m \omega / 2\hbar,$$

где x_0 — смещение положения равновесия; m и ω — масса и частота осциллятора. Если применить эту формулу к возбуждению планкеона внешним гравитационным полем Метагалактики и считать, что $x_0 = \Delta L$; $m = m_L$; $\omega = \omega_L$, то

$$W_{01} = (1/2) (\Delta L/L)^2$$

и тогда $(a/L)^3$ вакуумных планкеонов за время a/L дадут следующее число частиц:

$$N = W_{01} (a/L)^4 = (1/2) (\Delta L/L)^2 (a/L)^4. \quad (6.11)$$

Формулу для W_{01} можно получить и из других соображений. Предположим, что планкеон не совсем замкнут, и это характеризуется углом χ , который меняется от 0 до $\pi/2 - \alpha$. Тогда дефект объема будет следующий:

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \frac{4\pi^2 a^3}{V} \int_0^{\pi/2 - \alpha} \sin^2 \chi d\chi \approx \frac{4}{\pi} \alpha.$$

Соответствующий дефект площади $F = 4\pi^2 a^2 \sin^2 \chi$ равен $\Delta F/F = \alpha^2$. В то же время для $\alpha = L + \Delta L$: $|\Delta V/V| = 3\Delta L/L$.

Сравнивая выражения для $\Delta V/V$, получаем, что $\Delta L/L = (4/3\pi) \alpha$, и для дефекта площади приходим к результату, аналогичному формуле для вероятности возбуждения:

$$\Delta F/F = (3\pi/4)^2 (\Delta L/L)^2 = W_{01}.$$

Считая вероятность вылета частиц пропорциональной площади, снова получаем N .

Статистическая аналогия [148]. Для того чтобы планкеон был наблюдаем, необходимо допустить возможность размыкания простран-

ва Эйнштейна и его соединения с внешним пространством. Подобные геометрические модели частицы рассмотрены в [149]. Если первоначально планкеон имел некоторую энергию, то после его размыкания часть энергии может выйти во внешнее пространство и быть зарегистрирована наблюдателями, находящимися в этом пространстве.

Рассмотрим случай, когда энергия планкеона переносится классическими безмассовыми частицами, например фотонами. Запишем метрику внутри планкеона:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) \quad (6.12)$$

($a = \text{const}$ — радиус пространства Эйнштейна). Пусть сначала координата χ меняется от 0 до $\pi - \delta$, причем $0 < \delta < \pi/2$. Угол δ определяет степень размыкания планкеона. Будем считать, что частица, достигшая поверхности $\chi = \pi - \delta$, выходит во внешнее пространство. Найдем вероятность такого процесса, предполагая распределение частиц по начальным координатам и импульсам статистически равновесным.

Движение частицы в пространстве с метрикой (6.12) определяется тремя интегралами движения: энергией E , квадратом углового момента M^2 и проекцией углового момента на ось симметрии μ . Имеют место соотношения

$$E^2 = (c^2/a^2) (p_\chi^2 + M^2/\sin^2 \chi), \quad M^2 = p_\theta^2 + \mu^2/\sin^2 \theta, \quad \mu = p_\phi, \quad (6.13)$$

где p_χ, p_θ, p_ϕ — обобщенные импульсы, канонически сопряженные координатам χ, θ, ϕ соответственно. Выясним, при каких начальных условиях частица может достичь поверхности $\chi = \pi - \delta$. Если траектория частицы касается этой поверхности, то в точке касания $p_\chi = 0$. Тогда первое соотношение (6.13) дает равенство $M = (aE/c) \sin \delta$. Если же

$$M < (aE/c) \sin \delta, \quad (6.14)$$

то частица и подавно достигает поверхности $\chi = \pi - \delta$. Условие (6.14) выделяет область Ω в фазовом пространстве начальных координат и импульсов, соответствующую частицам, выходящим из планкеона во внешнее пространство. При статистическом равновесии в начальный момент времени функция распределения по координатам и импульсам f зависит только от энергии, $f = f(E)$, причем

$$\int f(E) d^3x d^3p = 1 \quad (6.15)$$

(условие нормировки функции), где $d^3x d^3p$ — элемент фазового объема. Интегрирование в (6.15) производится по всем возможным значениям начальных координат и импульсов. Вероятность выхода частицы во внешнее пространство

$$W = \int_{(\Omega)} f(E) d^3x d^3p.$$

Используя условие нормировки (6.15), получаем

$$W = 1 - \pi \cos^2 \delta / (\pi - \delta + \sin \delta \cos \delta).$$

Если $\delta \ll \pi$, то вероятность

$$W \approx \delta^2 \quad (6.16)$$

пропорциональна площади поверхности $\chi = \pi - \delta$. Энергия, которую может излучить планкеон, равна его первоначальной энергии, умноженной на W , т. е. опять пропорциональна площади.

Отождествив диаметрально противоположные точки пространства Эйнштейна [150], получим эллиптическое пространство, объем которого вдвое меньше объема пространства Эйнштейна [151]. Координата χ теперь должна меняться от 0 до $\pi/2 - \delta$. В этом случае

$$W = 1 - (\pi/2) \cos^2 \delta / (\pi/2 - \delta + \sin \delta \cos \delta).$$

Для малых значений угла δ по-прежнему справедлива формула (6.16).

Квантовая модель [152]. Вычислим теперь плотность частиц, рождающихся из одного планкеона за один период его колебания. Будем использовать методы квантовой теории для скалярного массивного поля в изотропном мире согласно [58], которые практически не отличаются от метода [126], изложенного в § 5.4, но применяются к одному планкеону. Закон изменения масштабного фактора возбужденного планкеона может быть различным:

$$a = L + \gamma t; \quad a' = L (1 + \gamma \sin \omega t); \quad a'' = \sqrt{L^2 + t^2} \dots \quad (6.17)$$

Ограничимся для простоты первым случаем. Решение для третьего случая дано в [52], где показано, что скорость рождения пар частиц на малых временах в несингулярной метрике меньше, чем в сингулярной.

В § 1.7 получено следующее выражение для числа рожденных частиц из вакуума за время Δt :

$$\Delta N = (\pi/16) m^3 H_L^2 \Delta t a^3. \quad (6.18)$$

Отсюда, подставляя $H_L = \gamma/L$, $\Delta t = L$ (колебания с планковской частотой), находим

$$\Delta N / \Delta t \approx dN / dt = (\pi/16) m^3 \gamma^2 a^3 / L. \quad (6.19)$$

Если расширение Метагалактики тоже линейное, $a = t$, то

$$N = \frac{\pi}{16L} m^3 \gamma^2 \int t^3 dt = \frac{\pi m^3 \gamma^2}{64L} t^4. \quad (6.20)$$

Эта формула описывает рождение частиц с любой массой. Ввиду сильной зависимости числа частиц от m будут преобладать рожденные частицы с максимально большой, а именно планковской, массой. Тогда окончательно получим

$$N = (\pi/64) \gamma^2 (a/L)^4, \quad (6.21)$$

т. е. мы снова приходим к формуле типа (6.11). Энергия рожденных частиц вычисляется аналогично:

$$\Delta E_1 = \int d\lambda \frac{\omega}{a_L} \lambda^2 |\beta_\lambda|^2 = \frac{m^3 H_L^2}{4} a_L^3 \int_1^{x_{\text{макс}}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} \sin^2(xmt) dx,$$

Это выражение в отличие от формулы для ΔN_1 расходится, и приходится его обрезать на максимальном импульсе $x_{\text{макс}} = (mL)^{-1}$. Окончательно находим

$$E = m_L (\gamma^2/16) (\ln 2x_{\text{макс}} - 1) (a/L)^4 \approx 56m_L N.$$

Вернемся к формуле (6.21). Поскольку $\gamma = \Delta L/L$; $R_L = 2\kappa\varepsilon_L = 6/L^2$; $\Delta R_L/R = -2\Delta L/L = L^2/\bar{a}_L^2$; $\varepsilon = 3/\kappa\bar{a}_L^2$, где $\bar{a}_L$ — радиус кривизны, соответствующий ΔR_L , имеем

$$\Delta L/L = \varepsilon/2\varepsilon_L = \delta/2\delta_L,$$

где δ — плотность. Поэтому

$$N = A^3 (\delta/\delta_L)^2 (a/L)^4, A = \text{const} \approx 1. \quad (6.22)$$

Итак, мы получили формулу для числа частиц, рожденных планкеоном [152]. В то же время это число частиц с какой-то массой m должно давать наблюдаемую массу всей Метагалактики:

$$Mc^2 = (4/3) \pi \varepsilon_\phi a^3 = (4\pi a/\kappa) = m_L c^2 a/L = m_i N_i,$$

где ε_ϕ — плотность энергии Метагалактики; тогда

$$N_i = \frac{M}{m_i} = \frac{M}{m_L} \frac{m_L}{m_i} = \frac{a}{L} \frac{m_L}{m_i}.$$

Выведем формулу, обобщающую соотношение Дирака [152]:

$$\frac{m_L}{m_i} = A^3 \frac{\delta_i^2}{\delta_L^2} \frac{a^3}{L^3} = A^3 \frac{a^3}{L^3} \frac{(\delta_i l_i^3)^2 L^6}{(\delta_L L^3) l_i^6} = A^3 \frac{a^3}{l_i^6} L^3 \frac{m_i^2}{m_L^2}.$$

Отсюда $(m_L/m_i)^3 = A^3 (aL/l_i^2)^3$, или

$$\frac{m_i}{l_i^2} = \frac{m_L}{AaL} = \frac{c^2}{2GaA} = \frac{M_0}{Aa^2} = \frac{m_g}{L^2}. \quad (6.23)$$

Это и есть обобщенная формула Дирака для масс и размеров устойчивых частиц. Здесь снова использованы соотношение Маха и определение комптоновской длины волны гравитона $a = \lambda_g = \hbar/m_g c$.

Вывод обобщенной формулы Дирака методом квантования гармонического осциллятора [154]. Выведем теперь формулу (6.23) методом квантования гармонического осциллятора [126] (см. § 5.4). Будем исходить из уравнения для безмассового скалярного поля с минимальной связью, которое в той же метрике с $cdt = ad\eta$ имеет вид:

$$\left[\frac{1}{a_L^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a_L^3 \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + \frac{l(l+1)}{a_L^2 \sin^2 \chi} \right] \psi = 0.$$

Временная часть T поля ψ [в результате подстановки $\psi = (L/a_L) \times \times T(t) Z$ и перехода к временной координате η] подчиняется простому уравнению

$$T_{\eta\eta} + (k^2 - \alpha^2) T = 0, \quad (6.24)$$

где $\alpha = \gamma$ взято из формулы (6.17); k — константа разделения, имеющая смысл импульса.

Для расчета плотности числа рожденных пар частиц определим

$$\Phi_k = \frac{L}{a_L} \left[T \left(1 - \frac{i\alpha}{k} \right) + \frac{i}{k} \frac{dT}{d\eta} \right] = \theta + \frac{i}{k} \frac{d\theta}{d\eta},$$

где $\theta = (L/a_L) T$, при начальных условиях $\theta(0) = 1$, $d\theta/d\eta(0) = ik$. Пользуясь решением (6.24), находим

$$\Phi_k = (2L\alpha/a_L) \sin \sqrt{k^2 - \alpha^2} \eta / \sqrt{k^2 - \alpha^2}.$$

Согласно [126] плотность числа рожденных частиц с волновым вектором k есть

$$n_k = 2 (a_L/L)^2 |\Phi_k|^2 = [8\alpha^2/(k^2 - \alpha^2)] \sin^2 \sqrt{k^2 - \alpha^2} \eta.$$

Полная плотность числа частиц

$$n_1 = \frac{4\pi}{(2\pi)^3 \pi^3 L^3} \int_{k_1}^{k_2} k^2 n_k dk,$$

где $k_1 = \alpha$; $k_2 = k_{\text{макс}} = 1$, что соответствует обрезанию расходящегося интеграла на планковском импульсе.

Поскольку основной вклад дают большие импульсы, в хорошем приближении можно заменить $\sin^2 \sqrt{k^2 - \alpha^2} \eta$ его средним значением за планковское время (время одной осцилляции планкеона), равным $1/2$. Учитывая малость α , получаем

$$n_1 = 2\alpha^2/\pi^4 L^3; \quad N_1 = 2\alpha^2/\pi^2,$$

где N_1 — число частиц, рожденных одним планкеоном за планковское время; за все время эволюции

$$N_{1a} = \frac{2\alpha^2}{\pi} \int \frac{da}{L}. \quad (6.25)$$

Учитывая, что число планкеонов в Метагалактике $N_2 = 3 \int \frac{a^2 da}{L^3}$, можно вычислить полное число частиц, рожденных за время ее существования

$$N_a = \frac{6\alpha^2}{\pi^2} \int \frac{da}{L} \int \frac{a^2 da}{L^3}. \quad (6.26)$$

Конкретные значения N_a зависят от выбора гипотезы о вариации констант.

В модели Дирака (см. гл. 1, атомная система единиц):

$$G = G_0 a_0/a; \quad L = L_0 \sqrt{a_0/a}; \quad m_L = m_{L0} \sqrt{a/a_0}, \quad (6.27)$$

где индекс нуль соответствует современным значениям параметров. В результате из (6.26), (6.27) получаем число частиц в современную эпоху:

$$N_n = (8\alpha^2/9\pi^2) a_0^4/L_0^4. \quad (6.28)$$

В модели [22] $G \sim a$; $\hbar \sim a^{-2}$; $c, \lambda = \text{const}$ имеет место та же зависимость $L(a)$; следовательно, снова выполняется (6.28).

В гравитационной системе единиц

$$N_a = (2\alpha^2/\pi^2) (a/L)^4,$$

что отличается от (6.28) лишь числовым коэффициентом.

Определим параметр возбуждения планкеона $\alpha = \Delta L/L$. Поскольку по порядку величины $\Delta R_L = \kappa \Delta \varepsilon$ и $R_L \sim L^{-2}$, где ΔR_L — изменение кривизны, вызванное изменением плотности энергии $\Delta \varepsilon$, можно записать

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_L} \sim \frac{\Delta R_L}{R_L} \sim \frac{\Delta L}{L} \sim \alpha, \text{ т. е. } \alpha \sim \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_L} \sim \frac{\delta}{\delta_L},$$

где δ — плотность массы рожденных частиц; $\delta_L = \varepsilon_L/c^2$. Тогда

$$N_a = (A/\pi^2) (\delta/\delta_L)^2 (a/L)^4, \quad (6.29)$$

где $A \approx 1$ — постоянная зависящая, от гипотезы о вариации констант.

Далее

$$dE_M = -\Delta p_M dV = (1/3) \Delta \varepsilon_M dV = L^2 \varepsilon_L \pi^2 da = (E_L/L) da = \\ = (c^4/2G) da, \quad (6.30)$$

где E_M — полная энергия Метагалактики, для которой получаем из (6.30) при $G = \text{const}$ соотношение Маха:

$$E_L/E_M = L/a, \text{ или } 2GE_M/c^4 a = 1$$

[нетрудно проделать соответствующие расчеты и в случае вариации $G(a)$]. Полагая $E_M = N_a m_i^2 c$ (m_i — масса частицы) и сопоставляя с (6.29), находим обобщенный закон Дирака:

$$A m_i/l_i^2 = m_L/aL = c^2/2Ga = M/a^2, \quad (6.31)$$

где l_i — эффективный размер частицы; $m_i = (4/3)\pi l_i^3 \delta_i$. Будем полагать, что это соотношение применимо к любым устойчивым частицам, т. е. выполняется следующий критерий гравитационной устойчивости: для устойчивой частицы локальное гравитационное давление (плотность энергии) на некотором характерном радиусе взаимодействия l_i равно давлению Метагалактики. Иными словами,

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{a^2} = \frac{m_n}{\lambda_n^2} = \frac{m_e}{l_e^2} = \frac{m_\nu}{l_\nu^2} = \frac{m_i}{l_i^2} = \frac{Bc^2}{2Ga} = \frac{c^2}{2Ga^*}, \\ \text{или} \\ L^2 a = \lambda_i l_i^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

где $B \approx 2$; $a^* \approx a/2$. Как будет видно из дальнейшего, для электрона l_e — его классический радиус, для нейтрино l_ν — характерная длина слабых взаимодействий и т. д.

6.3. ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИОННОГО ВАКУУМА К ЧАСТИЦАМ [152, 154]

Параметры адронов. В частности, формула (6.32) приводит к параметрам π -мезона: характерная длина сильного взаимодействия

$$\lambda_\pi = (L^2 a)^{1/2} = \hbar/m_0 c,$$

$$\text{где } m_0 = \frac{\hbar^{2/3}}{2Ga^*} \approx \frac{m_\pi}{2} \approx 1,28 \cdot 10^{-25} \text{ г.}$$

Подчеркнем, что l_i совпадает с комптоновской длиной волны только для сильно взаимодействующих частиц, близких по массе к массе мезонов. Если считать, что модель нуклона — это плотная упаковка найденных частиц массой m_0 , то их число из геометрических соображений составляет 13. В самом деле, $13m_0 \approx m_n \approx 1,66 \cdot 10^{-24}$. Это совпадение получено при $a = 0,7 \cdot 10^{-28}$ см.

Масса электрона. Предположим, что масса электрона имеет в основном электромагнитное происхождение. Тогда $m_e c^2 = e^2/l_e$, а из (6.32) следует:

$$m_e/l_e^2 = c^2/2Ga.$$

Отсюда, исключая l_e , нетрудно получить следующую формулу:

$$m_e/m_L = \alpha^{2/3} (L/a)^{1/3},$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры*. Таким образом,

$$m_e \approx (\hbar \alpha^{2/3}/cL) (L/a)^{1/3} \approx 10^{-27}$$

(в граммах), что хорошо согласуется с данными экспериментов.

Масса нейтрино [152, 155]. Рассмотрим соотношение (6.32), взяв в качестве $l = l_\nu$ характерную длину слабых взаимодействий:

$$l_\nu = l_F = \sqrt{G_F/\hbar c}$$

(формула Гамова). Тогда для соответствующей массы (в граммах) получим

$$m_\nu = G_F/2Ga\hbar c \approx 3 \cdot 10^{-33},$$

что составляет 2 эВ. Это значение согласуется с астрофизическими оценками для массы нейтрино ($m_\nu < 40$ эВ [156]) и близко к последним лабораторным оценкам [157].

Длина свободного пробега. Известно, что длина свободного пробега частицы газа есть

$$\bar{\lambda} = \lambda_{\text{св.проб}} = 1/\sigma n,$$

где σ — сечение взаимодействия, которое считаем близким к l_i^2 ; n — плотность числа частиц. Если полагать, что все вещество состоит из частиц данного сорта ($n \approx M/m\pi^2 a^3$), то для $\bar{\lambda}$ получим: $\bar{\lambda} \gtrsim a$, т. е. вещество ведет себя как идеальный газ невзаимодействующих частиц.

Реликтовая температура. Рассмотрим еще одно следствие из формулы (6.32). Обозначим

$$m_L/aL = m_L/l^{*2}, \text{ где } l^* = \sqrt{aL} \sim 10^{-3} \text{ см.}$$

Предположим, что есть частицы, комптоновская длина волны которых равна $\lambda^* = l^* = m^{-1}$. Выясним, сколько таких частиц может быть во

*Рассматривая поляризацию гравитационного вакуума, можно получить формулу постоянной тонкой структуры $\alpha^{-1} \approx 137 = \ln a/L$ [154].

Вселенной и какова температура, соответствующая энергии этих частиц:

$$N_{l*} = M/m^* = (a/L)^{1/2}, \quad E_{l*} = m_{l*}c^2 = kT,$$

где $T = \hbar c / k \sqrt{L a} \sim 10$ К, что близко к температуре реликтового излучения.

Отметим, что $l_v = L^{3/4} a^{1/4}$ и $E_v = \sqrt{E_L E_g} = kT$; если под E_g понимать энергию электронного гравитона, то $E_g = e^2/a$ и $E_v = c^2 \times \sqrt{\frac{e^2}{a} \sqrt{\frac{\hbar c}{2G}}} = kT_{ve}$, откуда $T_{ve} \sim 3$ К, что очень близко к наблюдаемой температуре.

Константы взаимодействия. В рамках данной модели получаем следующие формулы:

$$\alpha^{-1} = \ln(a/L), \quad G_F = (L^{3/2} a^{3/2}) \hbar c, \quad G = G_0 a_0 / a.$$

6.4. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ВАКУУМ И ВЫДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ В МИКРОМИРЕ [158]

В настоящее время физика элементарных частиц усиленно развивается как в теоретическом, так и в экспериментальном направлении. Наши знания в этой области дают надежду более основательно овладеть ядерной энергией, найти взаимосвязь между процессами, происходящими в микро- и макромире, понять, как развивается и устроена Вселенная, с одной стороны, и что происходит при реакциях элементарных частиц и как они сами устроены — с другой. Существует множество гипотез, причем до сих пор в исследованиях в области элементарных частиц не учитывается гравитационное поле. Здесь делается попытка связать гравитационные взаимодействия с взаимодействиями в мире элементарных частиц.

Существует довольно распространенное мнение, что гравитационное взаимодействие играет несущественную роль в явлениях микромира. Обычно это мнение связывают с тем, что гравитационная постоянная мала по сравнению с постоянными других взаимодействий. Однако это не всегда так. В [1] была продемонстрирована возможность рождения частиц нестационарным гравитационным полем. В дальнейшем эта идея получила широкое распространение в работах ряда советских и зарубежных авторов.

Особую роль гравитация может играть в физике высоких энергий. В этом параграфе показано, что гравитационное взаимодействие может иметь отношение к процессам выделения энергии в микромире.

Поскольку концепция гравитационного вакуума дает основные параметры частиц и их взаимодействий, открываются важные приложения в физике элементарных частиц и атомного ядра.

Из модели гравитационного вакуума получено [см. (6.23)], что для устойчивых элементарных частиц

$$E/r^2 = Mc^2/a^2 = \beta c^4 / 2Ga,$$

где $\beta \approx 1$ — безразмерный коэффициент; $a \sim 10^{28}$ см; M — размеры Метагалактики; r — величина, пропорциональная размерам частицы; E — ее энергия. Этому соотношению эквивалентно следующее:

$$\epsilon r = \epsilon_{gM} a = (3\beta/4\pi) c^4/2Ga,$$

где ϵ — средняя плотность энергии.

Выдвинем гипотезу (которая проверяется по экспериментальным данным) о том, что для различных процессов выделения энергии в микромире и для их макроскопических проявлений должно выполняться аналогичное условие

$$\Delta\epsilon r = \eta\epsilon r \geq \epsilon_{gM} a = (3\beta/4\pi) c^4/2Ga, \quad (6.33)$$

где r — размер области реакции; ϵ — плотность энергии в области реакции; η — коэффициент выделения энергии, который может зависеть от характера реакции.

Деление ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$. В данном случае полная энергия, выделяющаяся при одном акте деления, $E = (4\pi/3) \epsilon l^3 = 200$ МэВ. Для проверки критерия (6.33) важно знать энергию E и расстояние r , равное размеру невозмущенного ядра урана $r_{\text{я}} = A^{1/3} r_N$, где $A = 235$ — массовое число; $r_N = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см — радиус нуклона. Формулу (6.33) удобно записать в виде

$$E_{\text{я}}/r_{\text{я}}^2 a \geq (4\pi/3) \epsilon_{gM}. \quad (6.34)$$

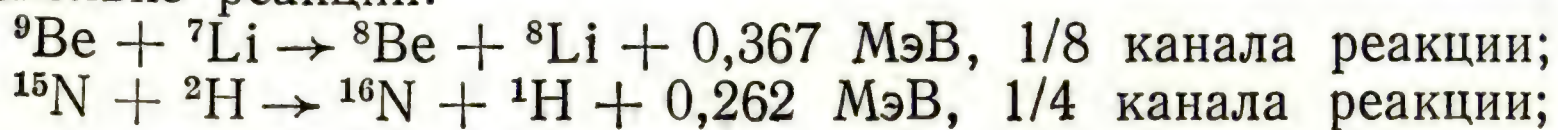
Зная $E_{\text{я}}$, $r_{\text{я}}$ и варьируя параметры a , M_0 , ρ_M Метагалактики, оценим левую и правую части (6.34). Результаты расчетов приведены ниже:

$\rho_M, 10^{-30} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$a, 10^{28} \text{ см}$	$M_0, 10^{56} \text{ г}$	$\epsilon_{gM}, 10^{-9} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$	$\epsilon_{\text{я}}, 10^{-8} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$	ν
10,0	1,0	0,418	9,00	4,300	1,165
5,5	1,7	1,130	4,95	2,580	1,250
5,0	2,0	2,620	4,50	2,150	1,160
2,5	3,0	2,820	2,25	1,430	1,525
1,0	5,0	2,200	0,90	0,858	2,320
0,3	7,5	5,280	0,27	0,570	5,040

Здесь $\epsilon_{\text{я}} = \frac{E_{\text{я}}}{r_{\text{я}}^2 a}$; $\nu = \epsilon_{\text{я}}/(4\pi/3) \epsilon_{gM}$; $r_{\text{я}} = 8,64 \cdot 10^{-13}$ см; $E_{\text{я}} = 200$ МэВ.

Видно, что для всех приведенных параметров Метагалактики гравитационный эквивалент плотности выделяемой ядерной энергии $\epsilon_{\text{я}}$ превышает плотность энергии Метагалактики. Критерий (6.34) выполняется с хорошим запасом.

Термоядерные реакции (реакции синтеза на легких ядрах). Энергетические выходы реакций синтеза, рассчитанные по массам протонов для более чем 350 реакций, показывают, что энергия выхода реакции находится в пределах от 0,3 до 23 МэВ. Исключения составляют несколько реакций:



$^{17}\text{O} + ^3\text{He} \rightarrow ^{18}\text{F} + ^2\text{H} + 0,155 \text{ МэВ}$, 1/6 канала реакции;

с аномально низким выходом энергии. Не рассматривая эти реакции, проверим критерий протекания реакций для термоядерных процессов по (6.34).

Оценки с использованием (6.34) показывают, что по порядку величины гравитационный эквивалент плотности выделяемой термоядерной энергии $\varepsilon_{\text{тя}} = E_{\text{тя}}/r_{\text{тя}}^2 a$ не менее плотности энергии Метагалактики.

Расчеты были сделаны для двух наиболее известных типов термоядерных реакций:



Результаты приведены ниже:

$\rho_M,$ $10^{-30} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$a, 10^{28} \text{ см}$	$M_0, 10^{56} \text{ г}$	$\varepsilon_{gM},$ $10^{-9} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$	$\varepsilon_{\text{тя}}^{(1),(2)},$ $10^{-8} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$	$\nu^{(1),(2)}$
10,0	1,0	0,418	9,00	12,5	3,24
				2,87	0,75
5,5	1,7	1,130	4,95	4,36	2,91
				1,75	0,875
5,0	2,0	2,620	4,50	3,52	1,88
				1,485	0,80
2,5	3,0	2,820	2,25	2,35	2,50
				0,97	1,03
1,0	5,0	5,200	0,90	1,41	3,82
				0,582	1,575
0,3	7,5	5,280	0,27	0,94	8,30
				0,388	3,54

Здесь $r_{\text{тя}}^{(1)} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$; $E_{\text{тя}}^{(1)} = 17,6 \text{ МэВ}$; $r_{\text{тя}}^{(2)} = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}$; $E_{\text{тя}}^{(2)} = 4,08 \text{ МэВ}$. Видно, что критерий (6.34) для термоядерных реакций также хорошо выполняется.

Деление образца ^{235}U (определение критической массы). Чтобы вызвать процессы распада (деления), как известно, необходимо наличие критической массы или критического размера. Посмотрим, можно ли вычислить $r_{\text{кр}}$ и $M_{\text{кр}}$ исходя из сделанных предположений, т. е. из формулы (6.33).

Делится лишь часть массы ^{235}U , обусловленная дефектом массы, доля этой массы составляет $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$, т. е.

$$M_{\text{дел}} = \eta M_{\text{полн}}, M_{\text{полн}} = (4\pi/3) \rho_0 r^3. \quad (6.35)$$

С учетом этого из (6.33) получаем

$$r_{\text{кр}} = a \varepsilon_{gM} / \rho_0 \eta c^2. \quad (6.36)$$

Результаты вычислений $M_{\text{кр}}$ и $r_{\text{кр}}$ приведены ниже:

$\rho_M, 10^{-30} \text{ г/см}^3$	$a, 10^{28} \text{ см}$	$M_0, 10^{56} \text{ г}$	$\varepsilon_{gm}, 10^{-9} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$	$\Gamma_{кр}, \text{ см}$	$M_{кр}, \text{ кг}$
10,0	1,0	0,418	9,00	10,400	93,4
7,0	1,5	0,990	6,30	10,000	77,5
5,5	1,7	1,130	4,95	10,005	77,6
5,0	1,8	1,320	4,50	9,500	76,4
4,0	2,3	2,000	3,60	9,900	75,5
2,5	3,5	4,500	2,25	8,900	54,7

Здесь $\rho_0 (^{235}\text{U}) = 18,6 \text{ г/см}^3$; $M_{кр} = (4\pi/3) \rho_0 r_{кр}^3$.

Обжатие и нагрев плазмы электромагнитными полями для получения термоядерной энергии. В настоящее время ведутся широкие исследования по созданию высокотемпературной плазмы, в которой могли бы происходить термоядерные реакции.

Большое внимание уделяется механизму нагрева плазмы электромагнитными полями. При этом создают магнитные поля различной ориентации, которые должны нагревать и изолировать плазму (удерживать ее в «горячем» состоянии).

Проверим выполнение гравитационного критерия (6.33) применительно к системам с магнитным нагревом и удержанием (конкретно — к системе магнитной кумуляции). В данном случае в (6.33) $\varepsilon = \varepsilon_H$ — плотность энергии магнитного поля.

Для соленоидального поля из условия сохранения магнитного потока следует закон изменения магнитного поля при симметричном обжатии

$$H = H_0 (R_0/R)^2. \quad (6.37)$$

Предполагая, что плазма заключена в цилиндре с магнитным полем, возрастающим по закону (6.37), определим требуемое давление магнитного поля в момент остановки системы. Предположим, что плотность внутренней энергии не превышает давления магнитного поля:

$$\varepsilon = (3/2) nkT \leq \varepsilon_H = H^2/8\pi. \quad (6.38)$$

Выразим ε_H через (6.37) и, используя критерий (6.33), получим выражения для радиуса остановки $R_{ост}$ и максимального значения напряженности магнитного поля $H_{ост}$, для которых выполняется критерий (6.33), т. е. при которых могут начаться термоядерные реакции:

$$R_{эф} = \left(\frac{3lr^2}{4} \right)^{1/3}; \quad R_{ост} = \left(\frac{3H_0^6 r_0^{12} l}{4\pi^2 \varepsilon_g^3 a^3} \right)^{1/8}.$$

При $R_{эф} \approx l$

$$R_{ост} = R_0 \sqrt[4]{(\varepsilon_{H0}/\varepsilon_{gm}) l/a}; \quad H_{ост} = H_0 (R_0/R)^2. \quad (6.39)$$

Здесь ε_{H0} — давление начального (исходного) магнитного поля до начала обжатия; l — длина цилиндра (длина соленоида); R_0 — начальный радиус цилиндра. Задавая числовые значения начальных параметров R_0, l, H_0 , а также выбирая модель Метагалактики (значения $\rho_M, a, M, \varepsilon_{gm}$), определяем $R_{ост}$ и $H_{ост}$. Заметим, что полученные в

настоящее время в экспериментах по магнитной кумуляции максимальные значения напряженности магнитного поля не превышают $(10-30) \cdot 10^6$ Э.

Результаты расчетов приведены ниже:

$l, 10^2 \text{ см}$	$\varepsilon_{gM} \left(\frac{a}{l} \right),$ 10^{17} эрг/см^3	$R_0/R_{\text{ост}}$	$R_{\text{ост}},$ 10^{-2} см	$H_{\text{ост}}, 10^9 \text{ Э}$	$H_{\text{эксп}}/H_{\text{ост}},$ 10^{-3}
1	9,0	707	1,415	4,97	2,00
3	3,0	540	1,850	2,91	3,44
5	1,8	493	2,030	2,34	4,10

$(\rho_M = 10^{-29} \text{ г/см}^3; a = 10^{28} \text{ см}, \varepsilon_{gM} = 9 \cdot 10^{-9} \text{ эрг/см}^3; H_0 \sim 10^4 \text{ Э}; R_0 = 10 \text{ см}; H_{\text{эксп.}} \sim 10^7 \text{ Э})$

$l, 10^2 \text{ см}$	$\varepsilon_{gM} \left(\frac{a}{l} \right),$ 10^{17} эрг/см^3	$R_0/R_{\text{ост}}$	$R_{\text{ост}},$ 10^{-2} см	$H_{\text{ост}}, 10^9 \text{ Э}$	$H_{\text{эксп}}/H_{\text{ост}},$ 10^{-3}
1	9,0	707	2,83	4,97	2,00
3	3,0	540	3,70	2,91	3,44
5	1,8	493	4,06	2,34	4,10

$(\rho_M, a, \varepsilon_{gM}, H_0, H_{\text{эксп}} \text{ те же, что и выше, но } R_0 = 20 \text{ см})$

$l, 10^2 \text{ см}$	$\varepsilon_{gM} \left(\frac{a}{l} \right),$ $10^{17} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$	$R_0/R_{\text{ост}}$	$R_{\text{ост}},$ 10^{-2} см	$H_{\text{ост}}, 10^9 \text{ Э}$	$H_{\text{эксп}}/H_{\text{ост}},$ 10^{-3}
1	8,10	670	1,50	4,50	2,22
3	2,70	515	1,94	2,65	3,76
5	1,62	447	2,24	2,00	5,00

$(\rho_M = 5 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3; \varepsilon_{gM} = 4,5 \cdot 10^{-9} \text{ эрг/см}^3; a = 1,8 \cdot 10^{28} \text{ см, остальные значения те же, что и выше})$

$l, 10^2 \text{ см}$	$\varepsilon_{gM} \left(\frac{a}{l} \right),$ $10^{17} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$	$R_0/R_{\text{ост}}$	$R_{\text{ост}},$ 10^{-2} см	$H_{\text{ост}}, 10^9 \text{ Э}$	$H_{\text{эксп}}/H_{\text{ост}},$ 10^{-3}
1	7,75	661	3,20	4,390	2,24
3	2,25	486	4,12	2,370	4,20
5	1,55	443	4,52	1,965	5,10

$(\rho_M = 2,5 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3; a = 3 \cdot 10^{28} \text{ см}; \varepsilon_{gM} = 2,25 \cdot 10^{-9} \text{ эрг/см}^3; R_0 = 20 \text{ см; остальные значения те же, что и выше})$

Анализируя приведенные данные, можно заключить, что магнитные поля, необходимые для осуществления регулируемых термоядерных процессов, в настоящее время в экспериментах не достигнуты. Давления, создаваемые сжимающимся магнитным полем соленоида, должны достигать значений порядка 10^{10} ат. Такие давления в систе-

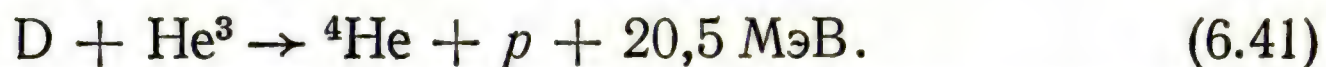
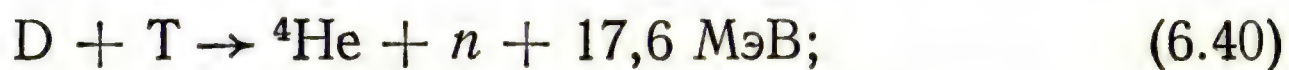
мах магнитной кумуляции или любых системах с магнитным удержанием (токамак и т. п.) не получены. Таким образом, гравитационный критерий показывает, что для осуществления термоядерной реакции необходимо увеличить напряженность магнитного поля на два-три порядка.

6.5. ИНЕРЦИОННЫЙ НАГРЕВ И ГРАВИТАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ ПРОТЕКАНИЯ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ [159]

Рассмотрим подробнее применение критерия (6.33) к возможности протекания термоядерных реакций.

Как известно, последние 10—15 лет широко ведутся исследования дейтерий-тритиевой плазмы по достижению термоядерных давлений и температур («лазерный», «пучковый» и «электромагнитный» способы). Под лазерным и пучковым понимаются способы, когда повышение давления, плотности и температуры плазмы происходит в результате сферического обжатия твердой таблетки (с начальной плотностью около 1 г/см^3), содержащей дейтерий-гелиевую или дейтерий-тритиевую компоненты, при помощи лазерного излучения или пучков ионов (электронные пучки, пучи тяжелых многозарядных ионов). Под электромагнитным понимается способ, когда сильно разреженная ($\rho \sim 10^{-5} \text{ г/см}^3$) газовая дейтерий-тритиевая плазма нагревается при взаимодействии с электромагнитными полями (системы токамак, стеллараторы и др.).

Рассмотрим критерий протекания термоядерных реакций при инерционном обжатии. Основными реакциями синтеза являются следующие:



При сверхвысоких давлениях (более 10^6 ат) и высоких температурах (более 10^6 К) обжимаемое вещество находится в состоянии термодинамически-равновесной плазмы и может описываться уравнением состояния, близким к уравнению состояния идеального газа.

В этих предположениях в физике высокотемпературной плазмы существует понятие *критерий Лоусона* — условие, выражающее начало протекания термоядерных реакций:

$$n\tau > 10^{14} \text{ с/см}^3, \quad (6.42)$$

где n — концентрация ядер смеси, см^{-3} ; τ — характерное время процесса (в нашем случае длительность нахождения плазмы в сжатом состоянии, или, что то же, время инерционного разлета, пропорциональное $R^*/c_{зв}$, где R^* — характерный размер — радиус плазмы в сжатом состоянии; $c_{зв}$ — скорость звука).

В процессе протекания реакций синтеза продукты реакции (α -частицы, протоны, нейтроны) могут покидать зону реакции. При сверхсильном обжатии малых масс (порядка 10^{-5} г) горючего вещества плотность вблизи момента остановки — момента максимального обжатия — может достигать нескольких десятков граммов в 1 см^3 , при

этом продукты реакции (α -частицы, протоны, нейтроны с энергией 14 МэВ) могут оставаться в зоне реакции. Из физики инерционного обжатия известно, что оптическая толща системы $\langle \rho R \rangle$ для случая, когда остаются в зоне реакции только α -частицы, выражается эмпирической формулой $\langle \rho R \rangle \approx 0,03 T$, где $20 \text{ кэВ} \leq T \leq 100 \text{ кэВ}$. Когда остаются α -частицы и нейтроны с энергией 14 МэВ, $\langle \rho R \rangle_n \approx 5 \text{ г/см}^2$, $50 \text{ кэВ} \leq T \leq 100 \text{ кэВ}$. В «пересчете на критерий Лоусона» это соответственно определяет:

$$(n\tau)_\alpha \gtrsim 3 \cdot 10^{15} \text{ с/см}^3; 5 \cdot 10^8 \text{ К} \leq T \leq 10^9 \text{ К}; \quad (6.43)$$

$$(n\tau)_n \gtrsim 5 \cdot 10^{15} \text{ с/см}^3; 5 \cdot 10^8 \text{ К} \leq T \leq 10^9 \text{ К}. \quad (6.44)$$

В области малых температур $10^5 \text{ К} \leq T \leq 10^8 \text{ К}$ трудно привести данные, так как параметры электромагнитных установок разнородны и получить с их помощью эмпирические формулы не всегда удается.

Гравитационный критерий протекания термоядерных реакций при сверхсильных обжатиях вещества [159]. Для получения гравитационного критерия протекания термоядерных реакций (аналог критерия Лоусона) воспользуемся обобщенной формулой Дирака (6.31):

$$m_L/aL = m_i/l_i^2 = Bc^2/2Ga = \dots, \quad (6.45)$$

где $B \approx 2$.

Для оценок полагаем радиус Метагалактики $7,5 \cdot 10^{27} \text{ см} \leq a \leq 1,5 \cdot 10^{28} \text{ см}$. Без ограничения общности считаем, что $m_i \approx m_L$ — масса планкеона, где m_i — масса плазмы, локализованной в некоторой характерной области. Для сферически-симметричного обжатия $l \sim R^*$.

Рассмотрим выражение

$$n\tau \geq A, \quad (6.46)$$

где n — концентрация ионов плазмы; τ — характерное время нахождения плазмы в сжатом состоянии; A — постоянная, подлежащая определению, $[A] = \text{с/см}^3$. Запишем левую часть (6.45) через плотность, используя $m_L = (4\pi/3) \rho l^3$, и скорость движения (среднетепловую или адиабатическую скорость звука). При этом получим

$$\rho l \approx (3/4\pi) Bc^2/2Ga \approx (3/4\pi) m_L/aL, \quad (6.47)$$

где $l \approx W\tau \approx c_{зв}\tau$ — область локализации термодинамически равновесной плазмы ($W = \sqrt{\bar{v}^2}$; $c_{зв} = 0,817W$; W — средняя квадратическая тепловая скорость ионов плазмы); ρ — плотность; $B \leq 2$.

Для 50%-ной дейтерий-тритиевой смеси $\rho = n\bar{m}$, где среднее значение массы $\bar{m} = 2,5m_p = 4,17 \cdot 10^{-24} \text{ г}$. Подставляя ρ и l в формулу (6.47), получаем следующий гравитационный аналог критерия Лоусона:

$$\begin{aligned} n\tau &\geq (3/4\pi) (m_L/aL) (1/\bar{m}) (1/c_{зв}) = A = \\ &= (3/4\pi) \left(\frac{c^2}{2Ga} \right) \left(\frac{3}{2} kT\bar{m} \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

или, в системе СГС,

$$n \geq 3Bc^2/8\pi G\bar{m}l = 3B/4\pi\lambda^2l \sim (10^{23}/l).$$

Скорость звука, входящая в выражение (6.48), или близкая к ней тепловая скорость W ионов, см/с, определяется значением абсолютной температуры плазмы, К: $W = 10^4\sqrt{T}$, поэтому числовое значение A в гравитационном критерии определяется не только значениями параметров планкеонного вакуума m_L , L и a , но и макроскопическими величинами $\bar{m}$ и T .

Для 50%-ных дейтерий-трیتیевой и дейтерий-гелиевой смеси и массы таблетки, близкой к массе планкеона m_L , получаем

$$A(T) = 7 \cdot 10^{18} (m_L/aL)/\sqrt{T}.$$

Подставляя значения m_L , a и L , находим расчетную формулу для A , с/см³:

$$A = 5,25 \cdot 10^{18}/\sqrt{T}. \quad (6.49)$$

Задавая значения абсолютной температуры, которые могут быть достигнуты при инерционном обжати, определяем значения A . Для оценки характерного времени удержания плазмы в сжатом состоянии при инерционном разлете полезно вычислить $c_{зв}$ и W :

$$\tau_{ин} = R_{ост}/c_{зв},$$

где $R_{ост}$ — радиус остановки, т. е. радиус системы в момент максимального обжатия; $c_{зв}$ — скорость звука для этого момента.

Для определения $\tau_{кр}$ — длительности нахождения дейтерий-трیتیевой смеси в критическом состоянии, начиная с которого пойдут термоядерные реакции, необходимо знать критическую плотность дейтерий-трیتیевой смеси. Чтобы вычислить $\rho_{кр}$, воспользуемся формулой (6.45). Мы имеем равенство

$$m_L/aL = Bc^2/2Ga = m_L/R_{кр}^2, \quad m = m_L,$$

где $R_{кр} = \sqrt{aL}$, которое можно записать приближенно:

$$m_L/R_{кр}^2 \approx 1.$$

Тогда $R_{кр} \approx \sqrt{m_L}$. Критическая плотность для сферической таблетки

$$\rho_{кр} = (3/4\pi) m_L/R_{кр}^3 = 0,239 m_L^{-1/2}.$$

[Для любого m : $l_{кр} = (2Gam/c^2)^{1/2}$, $\rho_{кр} = (3/4\pi) (c^2/2Ga)^{3/2} m^{-1/2}$.] Подставляя значения m_L , получаем для $a \sim 10^{28}$ см $\rho_{кр} = 71,7$ г/см³; $R_{кр} = 3,16 \cdot 10^{-3}$ см. Варьируя значение a в пределах от $7,5 \cdot 10^{27}$ до $1,5 \cdot 10^{28}$ см, находим значения $\rho_{кр}$ и $R_{кр}$:

$a, 10^{28}$ см	$R_{кр}, 10^{-3}$ см	$\rho_{кр}, \text{г/см}^3$
0,75	2,38	169,0
1,0	3,16	71,7
1,5	3,88	39,2

Заметим, что в прошлом термоядерные реакции для сверхсильного обжатия протекали бы хуже, требовали бы более высоких критических плотностей, чем в настоящем, а в будущем, например при $a = 1,5 \times 10^{28}$ см, необходимые для протекания термоядерных реакций плотности будут меньше, чем в настоящем. Данные приведены ниже:

$T, 10^7 \text{ K}$	$W, 10^7 \frac{\text{см}}{\text{с}}$	$c_{3B}, 10^7 \frac{\text{см}}{\text{с}}$	$A_1, 10^{15} \frac{\text{с}}{\text{см}^3}$	$A_2, 10^{15} \frac{\text{с}}{\text{см}^3}$
10^{-2}	0,316	0,258	16,6	11,1
10^{-2}	0,706	0,68	7,45	4,96
10^{-1}	1	0,817	5,25	3,5
$5 \cdot 10^{-1}$	2,24	1,83	2,35	1,57
1	3,16	2,58	1,66	1,11
5	7,06	6,75	0,745	4,96
10	10	8,17	0,525	0,35
50	22,4	18,3	0,235	0,157
10^2	31,6	25,8	0,166	0,111
$5 \cdot 10^2$	70,6	67,5	0,0745	0,0496

(для $A_1: \rho_{\text{кр}} = 71,7 \text{ г/см}^3$, $R_{\text{кр}} = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ см}$, $a \approx 1 \cdot 10^{28} \text{ см}$; для $A_2: \rho_{\text{кр}} = 39,2 \text{ г/см}^3$, $R_{\text{кр}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ см}$, $a = 1,5 \cdot 10^{28} \text{ см}$)

Зная $R_{\text{кр}}$ и $\rho_{\text{кр}}$, можно определить $\tau_{\text{кр}}$. Получаем для $a \sim 10^{28} \text{ см}$: $\tau_{\text{кр}} = 5,8 \cdot 10^{-26} A(T)$; для $a = 1,5 \cdot 10^{28} \text{ см}$: $\tau_{\text{кр}} = 1,0 \cdot 10^{-25} A(T)$.

Анализируя приведенные данные, можно заключить, что в области низких температур $10^5 \text{ K} \leq T \leq 5 \cdot 10^6 \text{ K}$ для получения условий начала протекания самоподдерживающейся термоядерной реакции необходимо «долго» ($\tau > \tau_{\text{ин}}$) держать плазму в сжатом состоянии. Время инерционного разлета $\tau_{\text{ин}} = R_{\text{ост}}/c_{3B}(T)$ для существующих экспериментов меньше, чем $\tau_{\text{кр}}$ в области этих температур.

В области «рабочих термоядерных температур» $20 \leq T \leq 200 \text{ кэВ}$ значение A снижается и приближается к значению $3 \cdot 10^{14} \text{ с/см}^3$, которое по прогнозам будет скоро достигнуто.

Сравнение с экспериментами. В настоящее время намечается прогресс в достижении термоядерных температур и плотностей на ряде существующих установок как в СССР, так и за рубежом. Не вдаваясь в техническую сторону создания таких установок и их эксплуатации, проанализируем для примера один из планируемых экспериментов на установке «Нова».

Мишень — тонкая оболочка ($\Delta R/R \approx 0,1$) с массой дейтерий-тритиевой смеси $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ г}$ обжимается 18 лазерными лучами (сферическое обжатие). Установка будет обеспечивать энергию лазерного излучения на мишень 10 кДж. В результате инерционного обжатия конечное состояние сжатой в шарик таблетки дейтерий-тритиевой смеси характеризуется $\rho_{\text{ост}} = 30 \text{ г/см}^3$; $T_{\text{ост}} = 5 \cdot 10^6 \text{ K}$.

Рассчитаем $R_{\text{ост}}$ и сравним с ее значением по гравитационно-термоядерному критерию (6.49). Мишень имеет средний радиус $R_0 = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

Для конечного состояния определяем конечный радиус (радиус остановки системы)

$$R_{\text{ост}}^{\text{эксп}} = \sqrt{0,3\rho_0/\rho_{\text{ост}}} R_0 = 0,126 R_0 = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ см.} \quad (6.50)$$

Таким образом, $R_{\text{ост}}^{\text{эксп}}$ меньше, чем $R_{\text{кр}}$, плотность $\rho_{\text{эксп}} = 30 \text{ г/см}^3$ также меньше $\rho_{\text{кр}} = 71,7 \text{ г/см}^3$, $\langle \rho_{\text{ост}} R_{\text{ост}} \rangle \approx A_{\text{эксп}}$ меньше $A_{\text{грав}}$ ($A_{\text{эксп}} = 30 \cdot 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^2 = 3,15 \cdot 10^{-2} \text{ г/см}^2$ при $T = 5 \cdot 10^6 \text{ К}$; $A_{\text{грав}} = 71,7 \cdot 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^2 = 0,226 \text{ г/см}^2$; $A_{\text{эксп}}/A_{\text{грав}} = 0,139$).

Как видно, согласно гравитационному критерию термоядерная реакция не может идти. Для зажигания реакции необходимо выполнение равенства $A_{\text{эксп}} = A_{\text{грав}}$. К тому же сомнительно, чтобы радиус остановки в эксперименте для $M_{\text{пл}} \approx m_L$ мог быть меньше $R_{\text{кр}}^{\text{грав}} = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

Оценим, какая плотность должна быть в установке «Нова» на $r = R_{\text{кр}}^{\text{грав}}$. Используя зависимость (6.50), получаем $\rho|_{R=3,16 \cdot 10^{-3} \text{ см}} = 8,65 \text{ г/см}^3$. Таким образом, для протекания самоподдерживающихся термоядерных реакций даже на планируемых установках инерционного обжатия необходимо добиться повышения $A_{\text{эксп}}$ и $\rho_{\text{ост}}$ примерно в 8—8,5 раз.

Глава 7

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОТО

7.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОТО С ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ ТЕНЗОРОМ МАТЕРИИ [1]

Уравнения движения (сохранения потоков импульса и энергии) в римановом пространстве можно найти, если написать, что

$$\bar{T}_{i;k}^k = 0. \quad (7.1)$$

При $\bar{T}_i^k = T_i^k + \theta_i^k$, где T_i^k — обычный тензор энергии-импульса, а θ_i^k — дополнительный тензор энергии-импульса, связанный с выделением или поглощением энергии,

$$T_{i;k}^k = -\theta_{i;k}^k = f_i. \quad (7.2)$$

Здесь f_i — компонента некоторой силы. Пусть

$$T_i^k = (p + \varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k p,$$

тогда (7.2) можно будет переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial [\sqrt{-g} (p + \varepsilon) u_i u^k]}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{(p + \varepsilon)}{2} u^k u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = f_i. \quad (7.3)$$

Очевидны следующие этапы преобразования выражения (7.3):

$$\begin{aligned} & \frac{u^k}{\sqrt{-g}} \frac{\partial [\sqrt{-g} (p + \varepsilon) u_i]}{\partial x^k} + (p + \varepsilon) u_i \frac{\partial u^k}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} - \\ & - \frac{(p + \varepsilon)}{2} u^k u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = f_i; \end{aligned}$$

$$(p + \varepsilon) u_i \left[u^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right] + u_i \frac{d(p + \varepsilon)}{ds} + \frac{\partial p}{\partial x^i} + \\ + (p + \varepsilon) \left[u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{u^k u^l}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right] = f_i. \quad (7.4)$$

Здесь $u^k \partial (p + \varepsilon) / \partial x^k = d(p + \varepsilon) / ds$, где $u^k \partial / \partial x^k = d/ds$. Сделаем преобразование

$$u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{u^k u^l}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = u^k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right) = \frac{d^* u_i}{ds},$$

где звездочка обозначает ковариантную производную. Тогда последнее уравнение примет вид:

$$(p + \varepsilon) u_i \left[u^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right] + \frac{d(p + \varepsilon) u_i}{ds} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = f_i. \quad (7.5)$$

Умножим это уравнение на u^i . Поскольку $u_i u^i = -1$, найдем, что

$$\frac{d\varepsilon}{ds} + (p + \varepsilon) \left[u^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right] = -u^k f_k. \quad (7.6)$$

Умножим выражение (7.6) еще раз на u_i :

$$u_i \frac{d\varepsilon}{ds} + (p + \varepsilon) u_i \left[u^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right] = -u_i u^k f_k. \quad (7.7)$$

Вычтем (7.7) из (7.5), тогда найдем, что

$$(p + \varepsilon) \frac{d^* u_i}{ds} + u_i \frac{dp}{ds} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = f_i + u_i u^k f_k. \quad (7.8)$$

Уравнения (7.6) и (7.8) являются двумя основными уравнениями искомой системы, определяющими p , ε , u^k как функции x^i . Для того чтобы замкнуть систему, напишем уравнение сохранения энергии и будем пока рассматривать только адиабатические процессы, когда

$$dE = dQ + dA \quad (dQ = T d\sigma, \quad dA = -p dV)$$

и энтальпия $dW = V dp + T d\sigma = d(pV + \varepsilon V)$. Поскольку $dE = c_V dT + (\partial E / \partial V)_T dV$, то

$$d\sigma = c_V \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV + p dV = \frac{c_V dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV. \quad (7.9)$$

При адиабатических процессах энтропия для частицы сохраняется: $u^k \partial \sigma / \partial x^k = d\sigma / ds = 0$. В более общем случае надо задать $T d\sigma / ds = \Phi(x^i)$. Пусть уравнение состояния произвольно, тогда, чтобы выразить энтропию через p и ε , поступим следующим образом. Прежде всего введем плотность энергии $\varepsilon = E/V$. Так как $c_V = (\partial E / \partial T)_V = V (\partial \varepsilon / \partial T)_V$, можно написать

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V = \frac{c_V}{V}; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = V \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T + \varepsilon = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p,$$

отсюда следует, что $V (\partial \varepsilon / \partial V)_T = T (\partial p / \partial T)_V - (p + \varepsilon)$. Далее используем

$$d\varepsilon = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T dV = \frac{1}{V} \left[c_V dT + \left(T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_T - (p + \varepsilon) \right) dV \right].$$

Выразим отсюда dV и dT через dp и $d\varepsilon$. Очевидно, что

$$dV = \frac{c_V dp - V d\varepsilon (\partial p / \partial T)_V}{c_V (\partial p / \partial V)_T + (\partial p / \partial T)_V [p + \varepsilon - T (\partial p / \partial T)_V]};$$

$$dT = \frac{V d\varepsilon (\partial p / \partial V)_T + dp [p + \varepsilon - T (\partial p / \partial T)_V]}{c_V (\partial p / \partial V)_T + (\partial p / \partial T)_V [p + \varepsilon - T (\partial p / \partial T)_V]}.$$

С помощью этих выражений находим:

$$d\sigma = c_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV = \frac{[(c_V/T) (\partial p / \partial V)_T - (\partial p / \partial T)_V^2] V d\varepsilon + (c_V/T) (p + \varepsilon) dp}{c_V (\partial p / \partial V)_T + (\partial p / \partial T)_V [p + \varepsilon - T (\partial p / \partial T)_V]}.$$
(7.10)

Уравнения состояния обычно задают в виде

$$E = E(T, V); p = p(T, V),$$

а нам надо выразить все величины через p и ε ; поскольку $\varepsilon = (E/V) = \varepsilon(T, V)$, отсюда получаем

$$T = T(p, \varepsilon); V = V(p, \varepsilon),$$

т. е. определяем $\sigma = \sigma(p, \varepsilon)$. В адиабатических процессах $d\sigma/ds = 0$, поэтому из (7.10) имеем

$$\left[\frac{c_V}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \right] V \frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{c_V}{T} (p + \varepsilon) \frac{dp}{ds} = 0.$$
(7.11)

Выражение (7.11) дает третье уравнение, связывающее p и ε . Поскольку

$$dE = d(\varepsilon V) = T d\sigma - p dV,$$

то

$$d\sigma/c_V = (p + \varepsilon) dV/c_V T + V d\varepsilon/c_V T$$
(7.12)

Сравнивая (7.12) с (7.10), находим, что

$$\frac{d\sigma}{c_V ds} = \frac{V}{c_V T} \left[(p + \varepsilon) \frac{d \ln V}{ds} + \frac{d\varepsilon}{ds} \right] = \frac{d \ln T}{ds} + \frac{1}{c_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \frac{dV}{ds} = 0,$$
(7.13)

откуда имеем тождество

$$(p + \varepsilon) d \ln V + d\varepsilon \equiv c_V dT/V + d \ln VT (\partial p / \partial T)_V,$$

или

$$d \ln V [p + \varepsilon - T (\partial p / \partial T)_V] \equiv c_V dT/V - d\varepsilon.$$

Это тождество легко проверить при замене $c_V dT = dE - (dE/dV)_T dV$.

Рассмотрим более подробно случай идеального газа, когда

$$pV = RT.$$
(7.14)

При этом $(\partial p / \partial V)_T = -p/V$; $(\partial p / \partial T)_V = p/T$ и уравнение (7.10) принимает вид:

$$\frac{d\sigma}{c_V} = \frac{(p + \varepsilon) dp - kp d\varepsilon}{p [\varepsilon - p/(k-1)]}.$$
(7.15)

Пусть $\varepsilon = p/(k-1) - y$, тогда (7.15) перейдет в

$$d\sigma/c_V = dp/p - k dy/y,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\varepsilon = \frac{p}{k-1} + \exp \left(-\frac{\sigma - \sigma_0}{kc_V} \right) p^{1/k};$$
(7.16)

при $\sigma \rightarrow \infty$ $\varepsilon = p/(k-1)$.

Уравнение (7.11) также упростится:

$$kp d\varepsilon = (p + \varepsilon) dp.$$

Из уравнений (7.13) и (7.15) следует:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} - k \frac{dy}{y} = \frac{V}{c_V T} \left(\frac{kp}{k-1} + y \right) \frac{dV}{V} + \frac{V}{c_V T} \left\{ \frac{dp}{k-1} + dy \right\} = k \frac{dV}{V} + \\ + (k-1) \frac{y}{p} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} + (k-1) \frac{dy}{p}, \end{aligned}$$

что дает

$$d(Vy) = [(k-1)y/p + k] = 0,$$

откуда вытекают два решения:

$$1) y = - \frac{k}{k-1} p; \text{ тогда}$$

$$\varepsilon = p/(k-1) - kp/(k-1) = -p, \varepsilon + p = 0 \quad (7.17)$$

[этот особый случай (некий гравитационный вакуум) будет рассмотрен отдельно];

$$2) y = \text{const}/V; \text{ тогда}$$

$$\varepsilon = \frac{p}{k-1} + \frac{\text{const}}{V}, \text{ или } \rho = \frac{p}{(k-1)c^2} + \frac{\text{const}}{c^2 V}$$

(при $c^2 \rightarrow \infty$ $\rho = 1/V$; поэтому $\text{const} = c^2$). Окончательно имеем

$$\varepsilon = p/(k-1) + c^2/V. \quad (7.18)$$

Подставляя (7.18) в (7.15), получаем $d\sigma/c_V = dp/p + kdV/V$, откуда следует

$$pV^k = \exp[(\sigma - \sigma_0)/c_V], \quad (7.19)$$

т. е. уравнение обычной адиабаты. Уравнение (7.11) можно переписать в виде

$$kp d\varepsilon/ds = (p + \varepsilon) dp/ds. \quad (7.20)$$

Из (7.16) и (7.19) следует:

$$\frac{p}{[\varepsilon - p/(k-1)]^k} = \exp \frac{\sigma - \sigma_0}{c_V} = \text{const } pV^k,$$

или

$$\varepsilon = \frac{p}{k-1} + \frac{\text{const}}{V} = \frac{p}{k-1} + \frac{c^2}{V} = \frac{p}{k-1} + \text{const } c^2 p^{\frac{1}{k}} \exp - \frac{\sigma - \sigma_0}{kc_V},$$

что подтверждает правильность наших выкладок. Если полная энергия на единицу массы $E = c^2 + E_{\text{вн}} = c^2 + pV/(k-1) \gg c^2$, то $p = (k-1)\varepsilon$, и мы приходим к ультрарелятивистской связи между p и ε . При этом $\sigma \rightarrow \infty$, на что мы указали выше, и уравнение (7.20) выполняется автоматически.

Введем в рассмотрение скорость звука. Она определяется как $(\partial p / \partial \rho)_{\sigma}^{1/2}$, откуда следует, что $\omega^2/c^2 = (\partial p / \partial \varepsilon)_{\sigma}$. Поскольку $dp/d\varepsilon = -dV/V$ и при $d\sigma/ds = 0$ $Vdp = dW$, получаем

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} = - \frac{\partial p}{\partial V} \frac{V}{p + \varepsilon} = - \left(\frac{\partial \ln W}{\partial \ln V} \right)_{\sigma}.$$

Отсюда следует соотношение

$$[\partial p / (p + \varepsilon) \partial \ln V]_{\sigma} = \omega^2/c^2,$$

переводящее одну систему записи уравнений (через p, ε) в другую (через W и V). Для уравнения состояния $pV = RT$, когда

$$\varepsilon = c^2/V + p/(k-1); \quad W = c^2 + kp/(k-1),$$

получаем

$$\frac{\omega^2}{c^2} = (k-1) \left/ \left(1 + \frac{k-1}{k} \frac{c^2}{pV} \right) \right.$$

или

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{k(k-1)(\varepsilon - c^2/V)}{k\varepsilon - (k-1)c^2/V}.$$

Выпишем всю полученную систему уравнений:

$$\frac{d\varepsilon}{(p+\varepsilon)ds} + \frac{\partial u^k}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{u^k f_k}{p+\varepsilon} = 0; \quad (7.21)$$

$$\frac{du_i}{ds} + \frac{1}{p+\varepsilon} \left(u_i \frac{dp}{ds} + \frac{\partial p}{\partial x^i} \right) = \frac{f_i + u_i u^k f_k}{p+\varepsilon}; \quad (7.22)$$

$$\frac{d\varepsilon}{ds} \frac{V}{p+\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T - \frac{T}{c_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \right] + \frac{dp}{ds} = 0. \quad (7.23)$$

Таким образом, для произвольных пространственных движений получена система из пяти уравнений, причем $i = 1, 2, 3$ [когда $i = 0$, уравнение (7.22) становится зависимым]. Подсчитаем число искоемых неизвестных функций. Это три компоненты скорости u^α , а также p, ε , т. е. всего пять неизвестных, но к ним добавляются 10 компонент метрического тензора g_{ik} . Поскольку четырьмя преобразованиями координат можно написать для g_{ik} четыре соотношения, то независимых компонент g_{ik} будет шесть; следовательно, будет 11 искоемых функций (для изэнтропических течений десять), в этом общем случае к полученным уравнениям движения надо добавить шесть уравнений для гравитационного поля $R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa \bar{T}_i^k$. Можно использовать все десять уравнений ОТО и одно термодинамическое уравнение (7.11), связывающее ε и p , не прибегая к уравнениям $\bar{T}_i^k{}_{;k} = 0$.

В заключение укажем еще один вид уравнения (7.21). Поскольку $T d\sigma ds = (p + \varepsilon) dV/ds + V d\varepsilon/ds$, получим, что $d\varepsilon/(p + \varepsilon) ds = -d \ln V/ds$, и (7.21) принимает вид:

$$\frac{d \ln V}{ds} = u^k \frac{\partial \ln V}{\partial x^k} = \frac{\partial u^k}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{u^k f_k}{p+\varepsilon}.$$

Это уравнение в свою очередь можно написать в компактном виде

$$\frac{V \partial (u^k \sqrt{-g}/V)}{\sqrt{-g} \partial x^k} + \frac{u^k f_k}{p+\varepsilon} = 0,$$

или

$$\frac{\partial (u^k \sqrt{-g}/V)}{\partial x^k} = \frac{\sqrt{-g} u^k f_k}{W},$$

где $W = (p + \varepsilon) V$. Заметим, что это уравнение можно вывести непосредственно из уравнения (7.3), если сделать замену

$$\sqrt{-g} (p + \varepsilon) u_i u^k = (\sqrt{-g} u^k/V) W u_i$$

и провести преобразования, аналогичные изложенным выше. В самом деле, мы имеем основное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} u^k/V)}{\partial x^k} W u_i + \frac{u^k}{V} \frac{\partial (W u_i)}{\partial x^k} + \frac{\partial (\sqrt{-g} p)}{\sqrt{-g} \partial x^i} =$$

$$-\frac{p+\varepsilon}{2} u^k u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{p}{2} g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = f_i,$$

последовательно преобразуя

$$\frac{u^k}{V} \frac{\partial (W u_i)}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{W}{V} \frac{u^k u^l}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{1}{V \sqrt{-g}} \frac{\partial (V \sqrt{-g} u^k / V)}{\partial x^k} W u_i = f_i.$$

Так как $dE = T d\sigma - p dV$, $dW = T d\sigma + V dp$, можно записать

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^k}{V} \left[\frac{\partial (W u_i)}{\partial x^k} - \frac{W u^l}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right] + \frac{\partial W}{V \partial x^i} + \frac{W u_i}{V \sqrt{-g}} \frac{\partial (V \sqrt{-g} u^k / V)}{\partial x^k} = \\ = \frac{T}{V} \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} + f_i; \\ u^k u^l \partial g_{kl} / \partial x^i = 2 u^k \partial u_k / \partial x^i. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Умножив обе части уравнения на u^i , найдем, что

$$\frac{W}{V \sqrt{-g}} \frac{\partial (V \sqrt{-g} u^k / V)}{\partial x^k} + \frac{T u^k}{V} \frac{\partial \sigma}{\partial x^k} + u^k f_k = 0,$$

но $u^k \partial \sigma / \partial x^k = d\sigma / ds$, поэтому

$$\frac{\partial (V \sqrt{-g} u^k / V)}{V \sqrt{-g} \partial x^k} + \frac{u^k f_k}{W} + \frac{T}{VW} \frac{d\sigma}{ds} = 0. \quad (7.25)$$

Умножим это выражение на u_i и, сравнив с (7.21), найдем, что

$$u^k \frac{\partial (W u_i)}{\partial x^k} - W u^k \frac{\partial u_k}{\partial x^i} + \frac{\partial W}{\partial x^i} = T \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} + V (f_i + u_i u^k f_k) + u_i T \frac{d\sigma}{ds}. \quad (7.26)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d^* u_i}{ds} = u^k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right), \quad u_i \frac{d^* u^i}{ds} = 0, \quad u^i \frac{d^* u_i}{ds} = 0; \\ \frac{d^* (W u_i)}{ds} + \frac{\partial W}{\partial x^i} = T \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} + V (f_i + u_i u^k f_k) + u_i T \frac{d\sigma}{ds}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

формулу (7.26) можно также записать в виде

$$u^k \left[\frac{\partial (W u_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial (W u_k)}{\partial x^i} \right] = T \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} + T u_i \frac{d\sigma}{ds} + V (f_i + u_i u^k f_k).$$

Если $f_i = 0$, $\sigma = \text{const}$, то $W u_i = \partial \phi / \partial x^i$, где ϕ — потенциал. Заменой $dW = T d\sigma + dp$ находим (7.22). Этими соотношениями исчерпываются основные уравнения для $T_{ik}^k = 0$. Точное решение системы этих уравнений возможно лишь в ограниченных случаях, приближенное — всегда, но это сопряжено с огромными трудностями. При решении уравнений надо соблюдать все те правила, которые установлены в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Решения этих уравнений могут быть общими, особыми, частными. Большой интерес представляет класс частных автомодельных решений. При решении уравнений часто бывает удобно провести преобразование переменных. Много зависит от выбора системы отсчета и системы координат. Основными системами отсчета являются: центральная, когда какая-то «точка» закреплена; сопутствующая, когда всюду скорость вещества равна нулю (мы «следуем» за веществом); инерциальная, когда производные $\partial g_{ik} / \partial x^l = 0$ ($\Gamma_{ik}^l = 0$); синхронная, когда интервал выбран в виде $-ds^2 = -dx^{02} + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$.

7.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ [150]

Общие принципы, изложенные в § 7.1, применим к движению среды, обладающему центральной симметрией. Прежде всего выпишем выражение для метрики

$$-ds^2 = -\exp \sigma c^2 d\tau^2 + \exp \omega dr_0^2 + \exp \mu (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (7.28)$$

и уравнение для гравитационного поля (уравнение с правой частью, стандартный вид)

$$R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa \bar{T}_i^k = \kappa (T_i^k + \theta_i^k), \quad (7.29)$$

где

$$\bar{T}_i^k = (\bar{p} + \bar{\varepsilon}) u_i u^k + \delta_i^k \bar{p} \quad (7.30)$$

(далее черту снимаем), причем под $\bar{p}$ и $\bar{\varepsilon}$ будем понимать обобщенные величины p и ε . Уравнения (7.29) для интервала (7.28) примут вид:

$$\begin{aligned} \kappa T_1^1 = \frac{\kappa}{\theta^2} \left(p + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \right) &= \frac{1}{2} \exp(-\omega) \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \sigma' \right) - \\ &- \exp(-\sigma) \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\sigma} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) - \exp(-\mu); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa T_2^2 = \kappa T_3^3 = \kappa p &= \frac{1}{4} \exp(-\omega) (2\sigma'' + \sigma'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu' \omega' - \sigma' \omega' + \mu' \sigma') + \\ &+ \frac{1}{4} \exp(-\sigma) (\dot{\omega} \dot{\sigma} + \dot{\mu} \dot{\sigma} - \dot{\omega} \dot{\mu} - 2\ddot{\omega} - \dot{\omega}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa T_0^0 &= -\frac{\kappa}{\theta^2} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{c^2} p \right) = \exp(-\omega) \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu' \omega'}{2} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \exp(-\sigma) \left(\dot{\omega} \dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) - \exp(-\mu); \end{aligned}$$

$$\kappa T_0^1 = \frac{1}{2} \exp(-\omega) (-2\dot{\mu}' - \dot{\mu} \mu' + \dot{\omega} \mu' + \dot{\sigma} \dot{\mu}) = -\frac{\kappa}{\theta^2} \frac{u}{c} (p + \varepsilon) \exp \frac{\sigma - \omega}{2}, \quad (7.31)$$

где точкой обозначены производные по $\sigma\tau$, штрихом — производные по r_0 . Вычислим теперь ковариантную дивергенцию

$$T_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} T_i^k)}{\partial x^k} - \frac{T^{kl}}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\theta_{i;k}^k = f_i. \quad (7.32)$$

Ковариантная производная дополнительного тензора энергии-импульса $\theta_{i;k}^k$ дает дополнительную силу $f_i = -\theta_{i;k}^k = T_{i;k}^k$, которая должна учитываться при выводе уравнений сохранения. Определим компоненты скоростей:

$$\begin{aligned} u^0 &= c d\tau/ds; \quad u_0 = g_{00} u^0 = -\exp \sigma u^0; \quad u^1 = dr_0/ds; \\ u_1 &= g_{11} u^1 = \exp \omega u^1. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{dr_0^2}{c^2 d\tau^2} = \exp \sigma \left(1 - \exp(\omega - \sigma) \frac{dr_0^2}{c^2 d\tau^2} \right) = \exp \sigma \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = \exp \sigma \theta^2,$$

где $ds = c d\tau \theta \exp(\sigma/2)$, по определению имеем $u/c = \exp \frac{\omega - \sigma}{2} (1/c) dr_0/d\tau$; отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
u^0 &= \frac{\exp(-\sigma/2)}{\theta}; \quad u_0 = -\frac{\exp(\sigma/2)}{\theta}; \quad u^1 = \frac{1}{c} \frac{dr_0}{d\tau} \frac{\exp(-\sigma/2)}{\theta} = \\
&= \frac{\exp(-\omega/2) u/c}{\theta}; \\
u_1 &= \frac{\exp(\omega/2) u/c}{\theta}.
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Основные уравнения для $T_{i;k}^k = f_i$ в метрике (7.28) имеют вид (см. § 7.1):

$$\begin{aligned}
(A\varepsilon_\tau + u\varepsilon_{r_0}) \frac{1}{p+\varepsilon} + \frac{1}{\theta^2} \left(A \frac{u}{c^2} u_\tau + u_{r_0} \right) + A \left(\frac{\omega_\tau}{2} + \mu_\tau \right) + u \left(\frac{\sigma_{r_0}}{2} + \mu_{r_0} \right) = \\
= -\frac{Acf_0 + uf_1}{p+\varepsilon};
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{c^2 \theta^2} (Au_\tau + uu_{r_0}) + \frac{1}{p+\varepsilon} \left(A \frac{u}{c^2} p_\tau + p_{r_0} \right) + \frac{A\omega_\tau u}{2c^2} + \frac{\sigma_{r_0}}{2} = \frac{f_1 + (u/c) Af_0}{p+\varepsilon};$$

$$(A\varepsilon_\tau + u\varepsilon_{r_0}) \frac{V}{p+\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T - \frac{T}{c_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \right] + [Ap_\tau + up_{r_0}] = 0,$$

где $A = \exp \frac{\omega - \sigma}{2}$, $\theta = 1 - u^2/c^2$. Уравнение неразрывности перейдет в следующее:

$$A \left(\frac{\omega}{2} + \mu \right)_\tau + u \left(\frac{\sigma}{2} + \mu \right)_r + \frac{A(u/c^2) u_\tau + u_r}{\theta^2} = A (\ln V)_\tau + (\ln V)_r.$$

Уравнение $d\sigma/ds = 0$ запишется как $A\sigma_\tau + u\sigma_{r_0} = 0$. При центральной симметрии число искомых функций составляет шесть: p , ε , $u_1 = u_2 = u$, σ , ω , μ . Поскольку мы имеем три уравнения сохранения, к ним надо добавить три уравнения поля, при этом одна из компонент метрики или скорости могут быть заданы заранее. Следовательно, нужно к уравнениям сохранения добавить только два уравнения поля. Систему отсчета при наличии центральной симметрии можно выбрать по-разному. Мы исследуем три основных случая: 1) $\exp \mu = r^2$, $r_0 = r$ (покоящаяся система отсчета); 2) $u = 0$ (сопутствующая система отсчета); 3) $\sigma = 0$ (синхронная система отсчета). В первом случае, полагая $\tau = t$, $r_0 = r$, $\sigma = v$, $\omega = \lambda$, $\mu = 2 \ln r$, придем к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{1}{p+\varepsilon} (A\varepsilon_t + u\varepsilon_r) + \frac{1}{\theta^2} \left(A \frac{u}{c^2} u_t + u_r \right) + \frac{1}{2} (A\lambda_t + uv_r) + \frac{2u}{r} = \\
&\quad = -\frac{Acf_0 + uf_r}{p+\varepsilon}; \\
&\frac{1}{c^2 \theta^2} (Au_t + uu_r) + \frac{1}{p+\varepsilon} \left(A \frac{u}{c^2} p_t + p_r \right) + \frac{1}{2} \left(A \frac{u}{c^2} \lambda_t + v_r \right) = \\
&\quad = \frac{f_1 + A(u/c) f_0}{p+\varepsilon}; \\
&A\varepsilon_t + u\varepsilon_r + \Phi (Ap_t + up_r) = 0, \text{ или } A\sigma_t + u\sigma_r = 0,
\end{aligned} \right\} \tag{7.34}$$

где

$$\Phi = (p+\varepsilon) \left/ \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T - \frac{T}{c_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2 \right] V \right., \quad \frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} = -\frac{dV}{V} \text{ при } \frac{d\sigma}{ds} = 0.$$

Уравнение неразрывности принимает вид:

$$A(\ln V)_t + u(\ln V)_r = \frac{1}{\theta^2} \left(A \frac{u}{c^2} u_t + u_r \right) + \frac{2u}{r} + \frac{u}{2} (A\lambda_t + u\nu_r), \quad (7.35)$$

а уравнения поля записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \kappa T_1^1 &= \kappa \frac{p + \varepsilon u^2/c^2}{\theta^2} = \exp(-\lambda) \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}; \\ \kappa T_2^2 &= \kappa T_3^3 = \kappa p = \frac{1}{2} \exp(-\lambda) \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) - \frac{1}{2} \exp(-\nu) \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right); \\ \kappa T_0^0 &= - \frac{\kappa}{\theta^2} \left(\varepsilon + p \frac{u^2}{c^2} \right) = \exp(-\lambda) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}; \\ \kappa T_1^0 &= - \frac{\kappa}{\theta^2} (p + \varepsilon) \frac{u}{c} \exp \frac{\nu - \lambda}{2} = \exp(-\lambda) \frac{\dot{\lambda}}{r}; \quad A = \exp \frac{\lambda - \nu}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Здесь штрихом обозначены производные по r , точкой — производные по ct . Из этих уравнений легко исключить $p + \varepsilon$. В самом деле, поскольку

$$\kappa (T_1^1 - T_0^0) = (\kappa/\theta^2) (p + \varepsilon) (1 + u^2/c^2) = \exp(-\lambda) (\lambda + \nu)',$$

используя последнее уравнение системы (7.36), найдем, что

$$\frac{\kappa}{\theta^2} (p + \varepsilon) = \frac{\exp(-\lambda) (\lambda + \nu)'}{1 + u^2/c^2} = - \frac{\exp(-\lambda) \dot{\lambda}}{2u/c} \exp \frac{\lambda - \nu}{2}, \quad (7.37)$$

откуда

$$A\lambda_t (1 + u^2/c^2) + u(\lambda + \nu)_r = 0. \quad (7.38)$$

Исключая ν из второго уравнения системы (7.36), (7.37), приходим к уравнению

$$A\lambda_t + u\lambda_r + u[(\exp \lambda - 1)/r + \kappa p r \exp \lambda] = 0. \quad (7.39)$$

Система уравнений (7.34), (7.38) и (7.39) является полной и определяет однозначно u , p , ε , λ , ν . Сделаем некоторые преобразования, упрощающие эту систему уравнений, исключив из нее ν . Поскольку

$$u\nu_r = -[u\lambda_r + A\lambda_t (1 + u^2/c^2)],$$

запишем

$$\frac{1}{2} (A\lambda_t + u\nu_r) = - \frac{u}{r} \left(A \frac{u}{c^2} \lambda_t + \lambda_r \right); \quad \frac{1}{r} \left(A\lambda_t \frac{u}{c^2} + \lambda_r \right) = - \frac{1}{2u} (A\lambda_t + u\lambda_r),$$

и система (7.34) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p + \varepsilon} (A\varepsilon_t + u\varepsilon_r) + \frac{1}{\theta^2} \left(A \frac{u}{c^2} u_t + u_r \right) + \frac{2u}{r} - \frac{u}{2} \left(A \frac{u}{c^2} \lambda_t + \lambda_r \right) &= \\ &= - \frac{\left(Af_0 + \frac{u}{c} f_1 \right) c}{p + \varepsilon}; \\ \frac{1}{c^2 \theta^2} (Au_t + uu_r) + \frac{1}{p + \varepsilon} \left(A \frac{u}{c^2} p_t + p_r \right) - \frac{1}{2u} (A\lambda_t + u\lambda_r) &= \\ &= \frac{f_1 + A(u/c) f_0}{p + \varepsilon}; \\ A\varepsilon_t + u\varepsilon_r + \Phi(Ap_t + up_r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

К этим уравнениям достаточно добавить уравнение (7.39), и мы получим систему четырех уравнений. Решив их (допустим, что это возможно), из (7.38) найдем v .

Рассмотрим теперь второй случай, соответствующий сопутствующей системе. Теперь положим $\tau = \tau$, $r_0 = R$, $\sigma = \sigma$, $\omega = \omega$, $u = 0$. Система (7.21) — (7.23) примет тогда совсем простой вид:

$$\frac{\varepsilon_\tau}{p + \varepsilon} + \frac{1}{2}(\omega + 2\mu)_\tau = -\frac{Acf_0}{p + \varepsilon}; \quad \frac{p_R}{p + \varepsilon} + \frac{\varepsilon_R}{2} = \frac{f_1}{p + \varepsilon}; \quad \varepsilon_\tau = 0, \quad (7.41)$$

причем $\varepsilon = \varepsilon(R)$, или $\varepsilon_\tau + \Phi p_\tau = 0$, где для идеального газа $\Phi = - (p + \varepsilon)/kp$; $\varepsilon_\tau = p_\tau (p + \varepsilon)/kp$, что выполняется тождественно (при $p = k\varepsilon$).

Обратимся теперь к уравнениям поля. Прежде всего проанализируем последнее уравнение системы (7.31); оно теперь при $u = 0$ примет вид:

$$2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' = \dot{\omega}\mu' + \sigma'\dot{\mu}. \quad (7.42)$$

Пусть теперь $\exp(\mu/2) = r = r(R, \tau)$, тогда (7.42) примет более простой вид: $2\dot{r}' = \sigma'\dot{r} + \dot{\omega}r'$; поскольку

$$\sigma' = -\frac{2p'}{p + \varepsilon} + \frac{2f_1}{p + \varepsilon}; \quad \dot{\omega} = -\left(\frac{2\dot{\varepsilon}}{p + \varepsilon} + \frac{4\dot{r}}{r} + \frac{2Af_0}{p + \varepsilon}\right),$$

получаем

$$(pr^2\dot{r})' + (\varepsilon r^2 r')' = f_1 r^2 \dot{r} - Af_0 r^2 r'. \quad (7.43)$$

Выпишем теперь первые три уравнения системы (7.31), производя замену $\mu = 2 \ln r$. При этом

$$\left. \begin{aligned} \kappa p &= \frac{\exp(-\omega)}{2} \left(\frac{2r'^2}{r^2} + \frac{r'\sigma'}{r} \right) - \exp(-\sigma) \left(\frac{2\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{\dot{r}\dot{\sigma}}{r} \right) - \frac{1}{r^2}; \\ -\kappa\varepsilon &= \exp(-\omega) \left(\frac{2r''}{r} + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r'\omega'}{r} \right) - \frac{\exp(-\sigma)}{2} \left(\frac{\dot{r}\dot{\omega}}{r} + \frac{2\dot{r}^2}{r} \right) - \frac{1}{r^2}; \\ \kappa p &= \frac{1}{4} \exp(-\omega) \left(2\sigma'' + \sigma'^2 + \frac{4r''}{r} - \sigma'\omega' - \frac{2\omega'r'}{r} + \frac{2\sigma'r'}{r} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \exp(-\sigma) \left(\dot{\omega}\dot{\sigma} + \frac{2\dot{\sigma}\dot{r}}{r} - \frac{2\dot{\omega}\dot{r}}{r} - 2\ddot{\omega} - \dot{\omega}^2 - \frac{4\ddot{r}}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

Уравнения (7.14), (7.43) и любое из уравнений системы (7.44) образуют полную систему дифференциальных уравнений. Удобно написать, вычитая третье уравнение (7.44) из первого, что

$$\begin{aligned} \kappa(p + \varepsilon) &= \exp(-\omega) \left[\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r''}{r} + \frac{r'\sigma'}{r} + \frac{r'\omega'}{r} \right] + \\ &\quad + \exp(-\sigma) \left[\frac{\dot{r}\dot{\omega}}{r} + \frac{\dot{r}\dot{\sigma}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{2r''}{r} \right], \end{aligned} \quad (7.45)$$

и использовать это «симметричное» уравнение в качестве пятого. Система при этом полностью задана. Если $f_i = 0$, то система уравнений сильно упрощается.

В третьем случае (синхронная система отсчета) при $\sigma = 0$ имеем уравнения сохранения:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{1}{p+\varepsilon} (A\varepsilon_\tau + u\varepsilon_{r_0}) + \frac{1}{\theta^2} \left(A \frac{u}{c^2} u_\tau + u_{r_0} \right) + \frac{A}{2} (\omega_\tau + 2\mu_\tau) + u\mu_r = \\
& \quad = - \frac{Acf_0 + uf_1}{p+\varepsilon}; \\
& \frac{1}{c^2\theta^2} \left(Au_\tau + uu_{r_0} \right) + \frac{1}{p+\varepsilon} \left(A \frac{u}{c^2} p_\tau + p_{r_0} \right) + \frac{Au\omega_\tau}{2c^2} = \frac{f_1 + (u/c) Af_0}{p+\varepsilon}; \\
& A\varepsilon_\tau + u\varepsilon_{r_0} = 0, \\
& \text{где } A\varepsilon_\tau + u\varepsilon_{r_0} + \Phi (Ap_\tau + up_{r_0}) = 0; \quad A = \exp (\omega/2).
\end{aligned} \right\} (7.46)$$

Уравнения поля примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
\kappa T_1^1 &= \frac{1}{2} \exp (-\omega) \mu'^2 - \left(\ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) - \exp (-\mu) = \frac{\kappa}{\theta^2} \left(p + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \right); \\
\kappa T_2^2 &= \kappa T_3^3 = \kappa p = \frac{1}{4} \exp (-\omega) (2\mu'' + \mu'^2 - \mu' \omega') - \\
& \quad - \frac{1}{4} (\dot{\omega} \dot{\mu} + 2\ddot{\omega} + \dot{\omega}^2 + 2\ddot{\mu} + \dot{\mu}^2); \\
\kappa T_0^0 &= \exp (-\omega) \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu' \omega'}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\dot{\mu} \dot{\omega} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) - \\
& \quad - \exp (-\mu) = - \frac{\kappa}{\theta^2} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{c^2} p \right); \\
\kappa T_0^1 &= \frac{1}{2} \exp (-\omega) (\dot{\omega} \mu' - \dot{\mu} \mu' - 2\dot{\mu}') = - \frac{\kappa}{\theta^2} \frac{u}{c} (p + \varepsilon) \exp (-\omega/2).
\end{aligned} \right\} (7.47)$$

Можно ввести $\exp (\mu/2) = r = r(ct, r_0)$ и использовать любые уравнения поля.

Мы рассмотрели все возможные случаи написания уравнений при центральной симметрии для метрики (7.28). В самом общем виде центрально-симметричная метрика имеет вид:

$$-ds^2 = -l^2 [d(ct)]^2 + h^2 dr^2 + k^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2m^2 dr d(ct).$$

Преобразованиями координат $r = f_1(r', ct')$, $ct = f_r(r', ct')$ этот интервал сведется к любому из написанных выше (для сопутствующей системы с помощью преобразований координат скорость и m^2 обращаются в нуль). Можно также двумя преобразованиями координат сделать, чтобы $h^2 = 1$, $k^2 = r^2$, тогда интервал примет вид:

$$-ds^2 = -\exp v c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + 2A^{-2} c dt dr,$$

что представляет собой интервал с чисто евклидовой пространственной частью. Решив уравнения для любого из разобранных выше интервалов, простым преобразованием координат можно найти решения и для любого другого интервала. Представляет интерес случай, когда $m^2 = 0$, $l^2 = h^2$, $k^2 = \exp \alpha$; тогда

$$-ds^2 = \exp \alpha [-c^2 dt^2 + dr_0^2 + r_0^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)].$$

При этом в интервале (7.28) надо положить $\sigma = \mu = \omega = \alpha$, т. е. наложить еще одно дополнительное условие на компоненты метрического тензора, что делает задачу нахождения решений более частной. Уравнения движения (сохранения) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p+\varepsilon} (\varepsilon_{\tau} + u\varepsilon_{r_0}) + \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{u}{c^2} u_{\tau} + u_{r_0} \right) + \frac{1}{2} (\alpha_{\tau} + u\alpha_{r_0}) &= - \frac{cf_0 + uf_1}{p+\varepsilon}; \\ \frac{1}{c^2 \theta^2} (u_{\tau} + uu_{r_0}) + \frac{1}{p+\varepsilon} \left(\frac{u}{c^2} p_{\tau} + p_{r_0} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{u}{c^2} \alpha_{\tau} + \alpha_{r_0} \right) &= \\ &= \frac{f_1 + (u/c) f_0}{p+\varepsilon}; \\ \varepsilon_{\tau} + u\varepsilon_{r_0} + \Phi (p_{\tau} + up_{r_0}) &= 0, \end{aligned} \right\} (7.48)$$

где $A = 1$. Уравнения поля также упростятся:

$$\left. \begin{aligned} \kappa T_1^1 &= \frac{\kappa}{\theta^2} \left(p + \varepsilon \frac{u^2}{c^2} \right) = \exp \left[-1 + \frac{3}{4} \alpha'^2 - \left(\ddot{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{4} \right) \right]; \\ \kappa T_2^2 &= \kappa T_3^3 = \kappa p = \frac{1}{4} \exp(-\alpha) [4\alpha'' + \alpha'^2 - (4\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2)]; \\ \kappa T_0^0 &= - \frac{\kappa}{\theta^2} \left(\varepsilon + \frac{u}{c^2} p \right) = \exp(-\alpha) \left[-1 + \alpha'' + \frac{\alpha'^2}{4} - \frac{3}{4} \dot{\alpha}^2 \right]; \\ \kappa T_0^1 &= - \frac{\kappa}{\theta^2} \frac{u}{c} (p + \varepsilon) = \frac{1}{2} \exp(-\alpha) [2\dot{\alpha}' + \alpha' \dot{\alpha}]. \end{aligned} \right\} (7.49)$$

Получены метрика и движения конформного типа.

7.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ, ИНТЕРВАЛА И ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ [160]

Опишем типичные приемы для преобразования координат, которые позволяют переходить от одного интервала к другому. Ограничимся двумя наиболее важными случаями перехода от интервала

$$-ds^2 = -\exp(\sigma) c^2 d\tau^2 + \exp \omega dR^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (7.50)$$

где $r = r(\sigma\tau, R)$, написанного для сопутствующей системы отсчета, к интервалу

$$-ds^2 = -\exp \nu c^2 dt^2 + \exp \lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (7.51)$$

написанному для системы отсчета, в которой при $r = 0$ $u = 0$, и обратного перехода от интервала (7.51) к интервалу (7.50). В первом случае положим $r = r(\sigma\tau, R)$; $ct = ct(\sigma\tau, R)$. Тогда $dr = r c d\tau + r' dR$; $c dt = \dot{c} c d\tau + ct' dR$. Подставляя эти выражения в интервал (7.51), найдем, что

$$\begin{aligned} -ds^2 &= -c^2 d\tau (c^2 \dot{t}^2 \exp \nu - r^2 \exp \lambda) + dR^2 (r'^2 \exp \lambda - c^2 t'^2 \exp \nu) + \\ &+ r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2c d\tau dR (\dot{r} r' \exp \lambda - \dot{c} t c t' \exp \nu). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Сравнив (7.52) с (7.50), получим:

$$\left. \begin{aligned} \exp \sigma &= c^2 \dot{t}^2 \exp \nu - r^2 \exp \lambda; \quad \exp \omega = r'^2 \exp \lambda - c^2 t'^2 \exp \nu; \\ \dot{r} r' \exp \lambda - \dot{c} t c t' \exp \nu &= 0. \end{aligned} \right\} (7.53)$$

Отсюда прежде всего следует, что

$$(r' \dot{c} t - c t' \dot{r}) [\exp(\sigma - \omega) r' c t' - \dot{r} \dot{c} t] = 0.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} r' \dot{c} t - c t' \dot{r} &= \Delta = D(r, ct) / D(R, \sigma\tau) = \sqrt{(-g_1) / (-g_2)} = \\ &= \exp[\sigma + \omega - (\lambda + \nu)] / 2 \neq 0; \\ -g_1 &= \text{diag} \{ \exp \sigma, \exp \omega, r^2, r^2 \sin^2 \theta \}; \\ -g_2 &= \text{diag} \{ \exp \nu, \exp \lambda, r^2, r^2 \sin^2 \theta \}. \end{aligned}$$

Отсюда имеет место равенство

$$\exp(\sigma - \omega) r' \dot{c} t' - \dot{r} \dot{c} t = 0. \quad (7.54)$$

Якобианы преобразования от координат r, ct к координатам R, ct никогда не должны обращаться в нуль. Далее находим:

$$\exp(-\lambda) = r'^2 \exp(-\omega) - \exp(-\sigma) r^{-2}; \quad (7.55)$$

$$\exp(-v) = \exp(\omega - \sigma) [r'^2 \exp(-\omega) - \dot{r}^2 \exp(-\sigma)] c^2 \dot{t}^2 / r'^2. \quad (7.56)$$

Если, например, известно $r = r(ct, R)$, то из (7.54) получаем $ct = ct(ct, R)$, из (7.55) — $\exp(-\lambda)$, из (7.56) — $\exp v$. Задача полностью решена.

Сделаем обратный переход. Пусть $R = R(ct, r)$, $ct = ct(ct, r)$. Тогда $dR = \dot{R} c dt + R' dr$; $c d\tau = \dot{c} \dot{t} c dt + c \tau' dr$.

Подставив эти выражения в интервал (7.50), найдем

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 (\exp \sigma \dot{c} t^2 - \exp \omega \dot{R}^2) + dr^2 [\exp \omega R'^2 - \exp \sigma c^2 \tau'^2] + + dr^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2c dt dR [\exp \omega \dot{R} R' - \exp \sigma \dot{c} t \tau']. \quad (7.57)$$

Сравнив (7.57) с (7.51), получим

$$(R' \dot{c} t - c \tau' \dot{R}) \exp(v - \lambda) R' c \tau' - \dot{R} \dot{c} t = 0.$$

Отсюда прежде всего следует:

$$\begin{aligned} \exp v &= \exp \sigma c^2 \dot{t}^2 - \dot{R}^2 \exp \omega; \\ \exp \lambda &= R'^2 \exp \omega - c^2 \tau'^2 \exp \sigma; \\ \exp \omega &= \dot{R} R' - c \tau c \tau' \exp \sigma. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} R' \dot{c} t - c \tau' \dot{R} &= \Delta^* = D(R, ct) / D(r, ct) = \exp\{[\lambda + v - (\sigma + \omega)]/2\} = \\ &= \Delta^{-1} \neq 0, \end{aligned}$$

имеем

$$\exp(v - \lambda) R' c \tau' - \dot{R} \dot{c} t = 0. \quad (7.58)$$

Якобиан преобразования от координат R, ct к координатам r, ct нигде не должен обращаться в нуль. Находим:

$$\exp(-\omega) = R'^2 \exp(-\lambda) - \dot{R}^2 \exp(-v); \quad (7.59)$$

$$\exp(-\sigma) = [R'^2 \exp(-\lambda) - \dot{R}^2 \exp(-v)] \exp(\lambda - v) c^2 \dot{t}^2 / R'^2. \quad (7.60)$$

Для решения задачи надо знать или $R = R(ct, r)$, или $ct = ct(ct, r)$, либо, если система одновременно и сопутствующая и синхронная, надо принять $\sigma = 0$. Тогда

$$\dot{R} = R' \{ \exp[(v - \lambda)/2] / c \dot{t} \} \sqrt{c^2 \dot{t}^2 - \exp v},$$

и уравнение (7.58) принимает вид:

$$\exp(v - \lambda) c^2 \tau'^2 + \exp v - c^2 \dot{t}^2 = 0,$$

откуда, зная $v = v(r, ct)$, $\lambda = \lambda(r, ct)$, получаем $ct = ct(r, ct)$ и $R = R(r, ct)$, т. е. задача также полностью решена.

Преобразуем якобианы

$$\Delta = D(r, ct) / D(R, ct) = r' \dot{c} t - \dot{r} c t' = (ct' / r) [r'^2 \exp(\sigma - \omega) - \dot{r}^2] \neq 0;$$

$$\Delta^* = D(R, ct) / D(r, ct) = R' \dot{c} t - \dot{R} c \tau' = (c \tau' / \dot{R}) [R'^2 \exp(v - \lambda) - \dot{R}^2] \neq 0.$$

Следовательно, $r'^2 \exp \sigma - \dot{r}^2 \exp \omega \neq 0$; $R'^2 \exp v - \dot{R}^2 \exp \lambda \neq 0$. При решении ряда конкретных задач выгодно использовать в качестве независимых переменных R и r , в чем мы сейчас убедимся. При переходе от сопутствующей системы к центрально-симметричной с выделенным центром и наоборот, примем $ct = ct(r, R)$; $ct = ct(r, R)$. Тогда

$$c d\tau = c \tau_r dr + c \tau_R dR; c dt = c t_r dr + c t_R dR,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} dR &= (dt - t_r dr)/t_R; \\ d\tau &= (dr/t_R) (t_R \tau_r - \tau_R t_r) + (\tau_R/t_R) dt; \\ r' &= -c\tau_R/c\tau_r = r_R; \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

$$\left. \begin{aligned} dr &= (d\tau - \tau_R dR)/\tau_r; \\ dt &= (dR/\tau_r) (t_R \tau_r - \tau_R t_r) + (t_r/\tau_r) d\tau; \\ R' &= -ct_r/c\tau_R. \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

Подставим (7.61) в (7.50) и, сравнив с (7.51), получим:

$$\left. \begin{aligned} \exp \nu &= (\exp \sigma c^2 \tau_R^2 - \exp \omega) c^{-2} t_R^{-2}; \\ \exp \lambda &= \frac{\exp \omega c^2 t_r^2 - \exp \sigma (ct_R c\tau_r - c^2 \tau_R t_r)^2}{c^2 t_R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.63)$$

При этом

$$\exp \sigma c\tau_R (c^2 t_R \tau_r - c^2 t_r \tau_R) + ct_r \exp \omega = 0.$$

Зная, например, $ct = ct(r, R)$, находим $ct = ct(r, R)$. Затем определяем $\exp \nu$ и $\exp \lambda$. При этом должны быть заданы $\exp \sigma$ и $\exp \omega$. Подставим теперь (7.62) в (7.51) и, сравнив с (7.50), получим

$$\begin{aligned} \exp \sigma &= (\exp \nu c^2 t_r^2 - \exp \lambda) c^{-2} \tau_R^{-2}; \\ \exp \omega &= \frac{\exp \lambda c^2 \tau_R^2 - \exp \nu (c^2 t_R \tau_r - c^2 t_r \tau_R)}{c^2 \tau_R^2}; \end{aligned}$$

$$\exp \nu ct_r c^2 (t_R \tau_r - t_r \tau_R) + \exp \lambda c \tau_R = 0.$$

Так, если известно $ct = ct(r, R)$, то можно найти $ct = ct(r, R)$; при этом $\exp \nu$, $\exp \lambda$ должны быть заданы.

Если в координатах r, ct решение существует в 4-области O , то решение в других координатах $R, c\tau$ должно существовать в области O' , причем каждой точке области O соответствует одна и только одна точка области O' (и наоборот), и якобиан преобразования нигде, включая внутреннюю границу области, не должен обращаться в нуль. В противном случае однозначность преобразований нарушится и использование других координат, систем отсчета уже становится бессмысленным. Топология 4-пространств O и O' одна и та же; никакими преобразованиями координат (систем отсчета) нельзя нарушить топологию указанных 4-пространств.

Скажем теперь несколько слов о значении принципа соответствия в ОТО. При обобщении любой теории, когда используются одна или несколько новых фундаментальных физических величин, которые не входили в состав старой, менее общей теории, новая теория должна переходить в старую, если исключить из нее введенные дополнительные фундаментальные физические величины (или устремить их к нулю либо к бесконечности). Так, в ОТО или механике сплошных сред в римановом пространстве, положив $G \rightarrow 0$, мы должны прийти к уравнениям СТО; приняв далее в СТО $c \rightarrow \infty$ ($1/c \rightarrow 0$), получим механику Галилея. Если сначала положить $c \rightarrow \infty$, то ОТО должна перейти в механику гравитирующей среды, подчиняющейся законам Ньютона; при $G \rightarrow 0$ снова придем к механике Галилея (обычной механике сплошных сред), причем порядок исключения G и c безразличен. Вот этот принцип перехода новой теории в старые (новых уравнений в старые) при исключении каких-либо фундаментальных величин и есть *принцип соответствия* (новой теории — старой). При этом, что нужно особо подчеркнуть, указанный принцип должен выполняться в любой системе отсчета, любой системе координат, если якобианы их преобразования конечны — не стремятся ни к нулю, ни к бесконечности. В ОТО часто утверждается, что, поскольку

при коллапсе топология пространства может измениться, принцип соответствия, возможно, в этих случаях не выполняется.

ОТО в ее первоначальном виде всегда опиралась на теорию гравитации Ньютона; фундаментальная гравитационная постоянная определялась из предельного перехода уравнений $R_i^k - \delta_i^k R/2 = \kappa T_i^k$, где $\kappa = 8\pi G/c^4$, к уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi G\rho$. Однако действительно может существовать такая ситуация, когда общая теория, базирующаяся на частной, не полностью переходит при выключении каких-либо величин в эту частную теорию. Это возможно и правомерно. Не для всего множества решений новой обобщенной теории обязательно может действовать принцип соответствия. Но вот что обязательно: если принцип соответствия соблюдается в какой-либо системе отсчета (координат), то он должен выполняться и в любой другой системе отсчета (координат), в противном случае система отсчета (координат) не будет допустимой. В этом заключается так называемый *принцип ковариантности*, который по сути дела является старым принципом теории функции действительного переменного; из него следует, что все системы измерений равноправны, если они связаны неисчезающим якобианом преобразования, который всюду или больше, или меньше нуля.

7.4. ОБЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОТО В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА [161]

В ряде случаев, когда $f_i = 0$, можно использовать для исследования в центрально-симметричной системе отсчета более удобную систему координат. Опишем этот переход.

Исследуем и упростим основные уравнения ОТО для метрики

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 \exp \nu + dr^2 \exp \lambda + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (7.64)$$

когда $f_i = 0$. Эти основные уравнения напомним в следующем виде (см. § 7.2).

$$\frac{1}{c^2 \theta^2} (A u_t + u u_r) + \frac{1}{p + \varepsilon} \left(A \frac{u}{c^2} p_t + p_r \right) - \frac{1}{2u} (A \lambda_t + u \lambda_r) = 0; \quad (7.65)$$

$$\frac{1}{p + \varepsilon} (A \varepsilon_t + u \varepsilon_r) + \frac{1}{\theta^2} \left(A \frac{u}{c^2} u_t + u_r \right) - \frac{u}{2} \left(A \frac{u}{c^2} \lambda_t + \lambda_r \right) + \frac{2u}{r} = 0; \quad (7.66)$$

$$A \varepsilon_t + u \varepsilon_r + \Phi (A p_t + u p_r) = 0; \quad (7.67)$$

$$A \lambda_t + u \lambda_r + u [(\exp \lambda - 1)/r + \kappa p r \exp \lambda] = 0; \quad (7.68)$$

$$A \lambda_t (1 + u^2/c^2) + u (\lambda + \nu)_r = 0. \quad (7.69)$$

Здесь $A = \exp [(\lambda - \nu)/2]$;

$$\Phi = (p + \varepsilon)/V [(\partial p/\partial V)_T - (T/c_V) (\partial p/\partial T)_V];$$

для идеального газа $\Phi = -(p + \varepsilon)/kp$.

Используем теперь уравнение $T_{0;k}^k = 0$, из которого при центральной симметрии следует

$$\left(\frac{r^2 (\varepsilon + p u^2/c^2)}{\theta^2} \right)_t + \left(\frac{u r^2 (p + \varepsilon)}{A \theta^2} \right)_r = 0. \quad (7.70)$$

[Уравнение (7.70) можно преобразованиями получить из (7.65) и (7.66), однако непосредственный вывод из равенства $T_{0;k}^k = 0$ короче.] Положим

$$(r^2/\theta^2) (\varepsilon + p u^2/c^2) = m_r, \quad (7.71)$$

тогда

$$(u r^2/\theta^2) (p + \varepsilon) = -A m_t. \quad (7.72)$$

Выясним смысл m . Поскольку $T_0^0 = (\varepsilon + pu^2/c^2)/\theta^2$, то

$$m = - \int_0^r r^2 T_0^0 dr = \frac{E_{\text{полн}}}{4\pi}, \quad \text{где} \quad E_{\text{полн}} = 4\pi \int_0^r \frac{(\varepsilon^2 + pu^2/c^2) r^2 dr}{\theta^2}$$

— полная энергия в объеме $V = (4/3)\pi r^3$. Поскольку из уравнения поля для T_0^0 следует, что

$$(r^2/\theta^2) (\varepsilon + pu^2/c^2) = (1/\kappa) [1 - [r \exp(-\lambda)]_r],$$

можно записать $m = (1/\kappa) \{1 - [r \exp(-\lambda)]_r\}$, откуда вытекает фундаментальное соотношение $m = (r/\kappa) [1 - \exp(-\lambda)]$, или

$$\exp(-\lambda) = 1 - \kappa m/r. \quad (7.73)$$

Выберем теперь в качестве независимых переменных вместо ct, r новые переменные m, r . Поскольку якобиан преобразования

$$d(ct, r)/d(m, r) = c\partial t/\partial m \neq 0,$$

это преобразование допустимо. Сначала преобразуем уравнения (7.71), (7.72), которые в этих переменных принимают вид:

$$(r^2/\theta^2) (\varepsilon + pu^2/c^2) t_m + t_r = 0; \quad A = - (ut_m r^2/\theta^2) (p + \varepsilon),$$

из которого следуют другие, также необходимые для дальнейших преобразований, не являющиеся независимыми уравнения:

$$ut_r = [A/(p + \varepsilon)] (\varepsilon + pu^2/c^2); \quad A = u (t_r - pr^2 t_m);$$

$$ut_m = - A\theta^2/r^2 (p + \varepsilon).$$

Далее запишем в переменных m, r основные уравнения (7.65), (7.66), (7.67), исключая в процессе преобразования из получаемых выражений t_r и t_m ; в результате этих операций получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{c^2 \theta^2} (u_r - pr^2 u_m) + \frac{1}{p + \varepsilon} (p_r + \varepsilon r^2 p_m) + \frac{\kappa}{2r(1 - \kappa m/r)} \left(\frac{m}{r} + pr^2 \right) &= 0; \\ \frac{1}{p + \varepsilon} (\varepsilon_r - pr^2 \varepsilon_m) + \frac{1}{\theta^2 u} (u_r + \varepsilon r^2 u_m) + \frac{2}{r} + \frac{\kappa}{2r(1 - \kappa m/r)} \left(\frac{m}{r} + \varepsilon r^2 \right) &= 0; \\ \varepsilon_r - pr^2 \varepsilon_m + \Phi (p_r - pr^2 p_m) &= 0; \quad (\sigma_r - pr^2 \sigma_m) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (7.74)$$

Уравнение (7.68), поскольку уже использовано одно полевое уравнение, при этом выполняется тождественно. Уравнение (7.69) принимает вид:

$$\left(1 - \frac{\kappa m}{r} \right) \left[\frac{\theta^2}{r^2} v_r + \left(\varepsilon + p \frac{u^2}{c^2} \right) v_m \right] = \frac{\kappa}{r} \left[p - \theta^2 \left(\varepsilon + \frac{m}{r^2} \right) \right]. \quad (7.75)$$

Полученный результат весьма существен. Вместо начальных четырех уравнений, содержащих $p, \varepsilon, u, \lambda$ как функции t, r , получена система трех уравнений, определяющих p, ε, u как функции m, r ; один интеграл найден, а именно получено соотношение (7.73). Уравнения (7.74) связывают эти переменные с t .

Для изэнтропических движений мы имеем систему только двух уравнений. Характеристики начальных и конечных уравнений выпишем ниже отдельно. Если $pV = RT$, то, как известно, $\Phi = - (p + \varepsilon)/kp$, и для ультрарелятивистского случая уравнение для энтропии переходит в тождество. Тогда задача сводится к интегрированию также только двух уравнений.

До сих пор задача рассматривалась в координатах Эйлера. Новая независимая переменная m не играет, как можно было бы подумать, роль координаты Лагранжа, хотя и связана с ней. Выясним эту связь. Лагранжева координата R вво-

дится так, чтобы выполнялось равенство $u = A (\partial r / \partial t)_R$; при этом $A (\partial \sigma / \partial t)_R = 0$, $\sigma = \sigma(R)$. В самом деле, поскольку $A \sigma_t + u \sigma_r = 0$, в лагранжевых координатах будем иметь [переход осуществляем с помощью якобиана $\partial(ct, r) / \partial(ct, R) = \partial r / \partial R \neq 0$, деля на него члены уравнений]:

$$u = A (\partial r / \partial t)_R; (\partial \sigma / \partial t)_R = 0.$$

Поскольку

$$A \partial(r, R) / \partial(ct, r) = (u/c) \partial(ct, R) / \partial(ct, R),$$

переходя к независимым переменным m, r , найдем, что

$$A \partial(r, R) / \partial(m, r) = (u/c) \partial(ct, R) / \partial(m, r), \quad (7.76)$$

что дает

$$A \frac{\partial R}{\partial m} + \frac{u}{c} \left(\frac{\partial t}{\partial m} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{\partial ct}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial m} \right) = 0. \quad (7.77)$$

Так как

$$ut_r = \frac{A}{p + \varepsilon} \left(\varepsilon + p \frac{u^2}{c^2} \right); \quad ut_m = - \frac{A \theta^2}{r^2 (p + \varepsilon)},$$

имеем

$$(p + \varepsilon) \frac{\partial R}{\partial m} = \left(\varepsilon + p \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial R}{\partial m} + \frac{\theta^2}{r^2} \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (7.78)$$

что дает

$$pr^2 \partial R / \partial m - \partial R / \partial r = 0. \quad (7.79)$$

Это уравнение определяет $R = R(r, m)$; из него легко получить, что

$$(\partial m / \partial r)_R + pr^2 = 0. \quad (7.80)$$

При $p = 0$ $m = m(R)$, при $p \neq 0$ $m = m(r, R)$, что понятно, так как отличное от нуля давление дает дополнительный вклад в энергию.

Перейдем к усовершенствованию уравнений для сопутствующей системы, полагая также $f_i = 0$. Основные уравнения имеют вид (см. § 7.2):

$$(pr^2 \dot{r})' + (\varepsilon r^2 \dot{r}') = 0, \quad (7.81)$$

причем

$$\dot{\varepsilon} + \Phi \dot{p} = 0; \quad -\varepsilon \dot{\varepsilon} / (p + \varepsilon) = \dot{\omega} + 4 \dot{r} / r; \quad (7.82)$$

$$-2p' / (p + \varepsilon) = \sigma' \quad (7.83)$$

(четвертое уравнение пока не выписываем). Уравнение (7.81) можно записать в виде

$$m^{*'} = \varepsilon r^2 r'; \quad (7.84)$$

$$\dot{m}^* = -pr^2 \dot{r}, \quad (7.85)$$

где $m^* = m^*(c\tau, R)$ — новая искомая функция. Допустим, что $m^* = m(c\tau, R)$, где $m = (2/\kappa) [1 - \exp(-\lambda)]$. Поскольку

$$\exp(-\lambda) = r'^2 \exp(-\omega) - \exp(-\sigma) \dot{r}^2,$$

получим

$$m = \frac{2}{\kappa} [1 + \exp(-\sigma) \dot{r}^2 - r'^2 \exp(-\omega)] = m^*. \quad (7.86)$$

Система уравнений (7.81) — (7.86) является полной и определяет $m, p, \varepsilon, r, \sigma, \omega$ как функции $c\tau, R$. Остается доказать, что $m^* = m$. Из того, что в центральной системе $R_m pr^2 = R_r$, следует:

$$\dot{m} = -pr^2 \dot{r} = \dot{m}^*. \quad (7.87)$$

Значит, $m = m^* + \bar{f}(R)$, причем без ограничения общности задачи можно положить $\bar{f}(R) = 0$. Следовательно, $m^* = m$, и полученная система уравнений действительно является полной.

Итак, в законченном виде полная система уравнений в сопутствующей системе отсчета имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon} + \Phi \dot{p} &= 0; \\ m &= (r/\kappa) [1 + \exp(-\sigma) \dot{r}^2 - r'^2 \exp(-\omega)], \quad m' = \varepsilon r^2 r'; \quad \dot{m} = -pr^2 \dot{r}; \\ \dot{\omega} + 4\dot{r}/r &= -2\varepsilon/(p + \varepsilon); \quad \sigma' = -\varepsilon p'/(p + \varepsilon); \\ (\varepsilon r^2 r')' + (pr^2 \dot{r})' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.88)$$

7.5. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКЕ [162]

Весьма важное значение для исследования ряда задач механики сплошных сред имеют автомодельные движения [163, 164]. Эти уравнения можно обобщить на случай учета гравитационного поля [162].

За основу вывода уравнений для автомодельных движений в ОТО возьмем уравнения (7.73)—(7.75).

Уравнения для идеальной среды запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{u}{c^2 \theta^2} (u_r - pr^2 u_m) + \frac{1}{p + \varepsilon} (p_r + \varepsilon r^2 p_m) + \\ + \frac{\kappa}{2r(1 - \kappa m/r)} \left(\frac{m}{r} + pr^2 \right) = 0; \end{aligned} \quad (7.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p + \varepsilon} (\varepsilon_r - pr^2 \varepsilon_m) + \frac{1}{\theta^2 u} (u_r + \varepsilon r^2 u_m) + \\ + \frac{2}{r} + \frac{\kappa}{2r(1 - \kappa m/r)} \left(\frac{m}{r} - \varepsilon r^2 \right) = 0; \end{aligned} \quad (7.90)$$

$$[V/(p + \varepsilon)] [(T/c_V) p_T^2 - p_V] (\varepsilon_r - pr^2 \varepsilon_m) = (p_r - pr^2 p_m). \quad (7.91)$$

Для определения v можно воспользоваться уравнением

$$A = \exp[(\lambda - v)/2] = u(t_r - pr^2 t_m). \quad (7.92)$$

Теперь нужно написать дополнительное уравнение, связывающее решение с t ; этим уравнением может быть, например (см. § 7.4), следующее:

$$(r^2/\theta^2) (\varepsilon + p u^2/c^2) t_m + t_r = 0. \quad (7.93)$$

Сначала преобразуем все уравнения к переменным $z = m/r$, r . Для этого напомним полученную систему уравнений в виде якобианов

$$\begin{aligned} \frac{u}{c^2 \theta^2} \left[\frac{\partial(u, m)}{\partial(r, m)} - pr^2 \frac{\partial(r, u)}{\partial(r, m)} \right] + \frac{1}{p + \varepsilon} \left[\frac{\partial(p, m)}{\partial(r, m)} + \varepsilon r^2 \frac{\partial(r, p)}{\partial(r, m)} \right] + \\ + \frac{\kappa(z + pr^2)}{2r(1 - \kappa z)} \frac{\partial(r, m)}{\partial(r, m)} = 0; \\ \frac{1}{p + \varepsilon} \left[\frac{\partial(\varepsilon, m)}{\partial(r, m)} - pr^2 \frac{\partial(r, \varepsilon)}{\partial(r, m)} \right] + \frac{1}{\theta^2 u} \left[\frac{\partial(u, m)}{\partial(r, m)} + \varepsilon r^2 \frac{\partial(r, u)}{\partial(r, m)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r} \frac{\partial(r, m)}{\partial(r, m)} + \frac{\kappa(z - \varepsilon r^2)}{2r(1 - \kappa z)} \frac{\partial(r, m)}{\partial(r, m)} = 0; \\
& \left(\frac{V}{p + \varepsilon} \right) \left(\frac{Tp_T^2}{c_V} - p_V \right) \left[\frac{\partial(\varepsilon, m)}{\partial(r, m)} - pr^2 \frac{\partial(r, \varepsilon)}{\partial(r, m)} \right] = \frac{\partial(p, m)}{\partial(r, m)} - \\
& \quad - pr^2 \frac{\partial(r, p)}{\partial(r, m)}; \\
& \exp\left(\frac{\lambda - \nu}{2}\right) \frac{\partial(r, m)}{\partial(r, m)} = u \left[\frac{\partial(t, m)}{\partial(r, m)} - pr^2 \frac{\partial(r, t)}{\partial(r, m)} \right]; \\
& \frac{r^2}{\theta^2} \left(\varepsilon + p \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial(r, t)}{\partial(r, m)} + \frac{\partial(t, m)}{\partial(r, m)} = 0.
\end{aligned}$$

Разделим якобианы на $\partial(r, z)/\partial(r, m) \neq 0$, произведем замену $m = zr$ в числителях всех выражений и раскроем якобианы; в результате получим:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{u}{c^2 \theta^2} [u_r r - u_z (z + pr^2)] + \frac{1}{p + \varepsilon} [p_r r + (\varepsilon r^2 - z) p_z] + \\
& + \frac{\kappa(z + pr^2)}{2(1 - \kappa z)} = 0; \\
& \frac{1}{p + \varepsilon} [\varepsilon_r r - \varepsilon_z (z + pr^2)] + \frac{1}{u \theta^2} [u_r r + (\varepsilon r^2 - z) u_z] + \\
& + 2 + \frac{\kappa}{2} \frac{(z - \varepsilon r^2)}{(1 - \kappa z)} = 0; \\
& \frac{V}{p + \varepsilon} \left[\frac{Tp_T^2}{c_V} - p_V \right] [\varepsilon_r r - \varepsilon_z (z + pr^2)] = \\
& = p_r r - p_z (z + pr^2); \\
& \exp\left(\frac{\lambda - \nu}{2}\right) r = u [t_r r - t_z (z + pr^2)]; \\
& t_r r - t_z [z - (r^2/\theta^2) (\varepsilon + pu^2/c^2)] = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (7.94)$$

Пусть $u/c = a = a(z)$; $pr^2 = \xi(z)$; $\varepsilon r^2 = \eta(z)$; $t = r^\alpha T(z)$. Теперь система (7.94) примет вид:

$$\frac{a_z^2}{2(1 - a^2)} (z + \xi) = \frac{\xi_z}{\xi + \eta} (\eta + z) + \frac{\kappa(z + \xi)}{2(1 - \kappa z)} - \frac{2\xi}{\xi + \eta}; \quad (7.95)$$

$$\frac{a_z^2}{2a^2(1 + a^2)} (z - \eta) = 2 - \frac{\eta_z}{\xi + \eta} (z + \xi) + \frac{\kappa(z - \eta)}{2(1 - \kappa z)} - \frac{2\eta}{\xi + \eta}; \quad (7.96)$$

$$\frac{V}{p + \varepsilon} \left(\frac{Tp_T^2}{c_V} - p_V \right) [2\eta + \eta_z (z + \xi)] = [2\xi + \xi_z (z + \xi)]; \quad (7.97)$$

$$\exp[(\lambda - \nu)/2] r^{1-\alpha} = ca [\alpha T - (z + \xi) T_z];$$

очевидно, что раз $\lambda = \lambda(z)$; $v = v(z)$, то $\alpha = 1$, и последнее уравнение принимает вид:

$$\exp[(\lambda - v)/2] = ca[T - T_z(z + \xi)]. \quad (7.98)$$

Далее имеем

$$T - T_z[z - (\eta + 3a^2)/(1 - a^2)] = 0; \quad t = rT(z). \quad (7.99)$$

Рассмотрим теперь, какова связь между координатами m , r и координатой Лагранжа R для автомоделных движений. Из (7.79) в координатах z , r получим

$$R_z(pr^2 + z) - rR_r = 0. \quad (7.100)$$

Пусть $\bar{R} = r^\gamma \bar{R}$; тогда

$$\left. \begin{aligned} m &= (r/\kappa) [1 + \exp(-\sigma) \dot{r}^{-2} - \exp(-\omega) r'^2]; \quad \dot{\varepsilon} + \Phi \dot{p} = \\ &= 0, \text{ или } p = (k - 1) \varepsilon; \\ m' &= \varepsilon r^2 \dot{r}'; \quad \dot{m} = -pr^2 \dot{r}; \\ \dot{\omega} + 4\dot{r}/r &= -2\dot{\varepsilon}/(p + \varepsilon); \quad \sigma' = -2p'/(p + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (7.101)$$

Эта система содержит шесть искоемых функций p , ε , m , σ , ω , r и является, естественно, полной системой. Пусть

$$r = \tau^{\alpha-1} f_1(z), \quad \text{где } z = R\tau^{-\alpha}; \quad \exp(-\sigma) = \tau^\beta f_2(z);$$

$$\exp(-\omega) = \tau^\gamma f_3(z); \quad \varepsilon = \tau^{2(1-\alpha)} \psi(z); \quad p = \tau^{2(1-\alpha)} \Phi(z).$$

Подстановка этих выражений в систему (7.101) дает уравнения

$$\Phi = (k - 1) \psi; \quad m = (\tau^{\alpha-1}/\kappa) f_1 \{1 + f_2 [(\alpha - 1) f_1 - \alpha f_1' z]^2 - f_3 f_1'^2\} = \\ = \tau^{\alpha-1} F(z),$$

где $F(z) = (f_1/\kappa) [1 + f_2 [(\alpha - 1) f_1 - \alpha f_1' z]^2 - f_3 f_1'^2]$, при этом $\gamma = 2$;

$$\beta = 2(2 - \alpha); \quad F' = \psi f_1'; \quad (\alpha - 1) F - \alpha F' z = -\Phi [(\alpha - 1) f_1 - \alpha f_1' z];$$

$$\frac{\alpha f_3' z}{f_3} - 2 + 4 \left[(\alpha - 1) - \alpha \frac{f_1' z}{f_1} \right] = - \frac{2 [2(1 - \alpha) \psi - \alpha \psi' z]}{\Phi + \psi};$$

$$\gamma \bar{R} = \bar{R}_z(z + \xi),$$

что определяет

$$(1/\gamma) d \ln \bar{R} = dz/(\xi + z).$$

Преобразуя полученное уравнение, можно написать следующую систему уравнений:

$$(z + \xi) \left[\frac{a_z^2}{2(1 - a^2)} - \frac{\kappa}{2(1 - \kappa z)} \right] + \frac{2\xi - (\xi - z) \xi_z}{\xi + \eta} = 0;$$

$$(\eta - z) \left[\frac{a_z^2}{2a^2(1 - a^2)} - \frac{\kappa}{2(1 - \kappa z)} \right] + \frac{2\xi - (z + \xi) \eta_z}{\xi + \eta} = 0;$$

$$2\xi + \xi_z(z + \xi) - \frac{V}{p + \varepsilon} \left[\frac{Tp_T^2}{c_V} - p_V \right] [2\eta + \eta_z(z + \xi)] = 0;$$

$$T_z/T = (1 - a^2)/[z(1 - a^2) - (\xi a^2 + \eta)];$$

$$\exp [(\lambda - \nu)/2] = ca [T - T_z(z + \xi)].$$

Эта система уравнений является полной: как будет показано ниже, она допускает ряд простых точных решений. Получая искомые величины как функции от z , мы тем самым знаем их как функции от $z_1 = r/t$, поскольку $t/r = T(z)$. Однако исследование системы уравнений в независимых переменных ct, r менее удобно, более громоздко, чем то, которое проведено ниже.

Посмотрим, какие автомодельные движения имеют место в сопутствующей системе отсчета. Основные уравнения (см. § 7.4) напомним в виде

$$f'_1/f_2 = -2\Phi'/(\Phi + \Psi).$$

Теперь окончательно можно написать, что

$$\exp(-\sigma) = \tau^{2(2-\alpha)} f_2(z); \quad \exp(-\omega) = \tau^2 f_3(z).$$

Здесь в обеих системах следует считать газ идеальным и

$$\frac{V[(T/c_V)p_T^2 - p_V]}{p + \varepsilon} = \frac{kp}{p + \varepsilon}.$$

Посмотрим, при каком более общем уравнении состояния движения могут быть автомодельными. Для этого надо положить, что

$$(Tp_T^2/c_V - p_V) V/(p + \varepsilon) = \tilde{f}(z).$$

Для первой системы $z = m/r$, для второй $z = R\tau^{-\alpha}$. Решив это уравнение, получим классы уравнений состояния, при которых движения автомодельны.

7.6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ЧИСЛЕ ЧАСТИЦ И РАЗЛИЧНЫХ ИСТОЧНИКАХ ЭНЕРГИИ [165, 166]

Основные уравнения. В обычной, «плоской» классической газодинамике, если есть внутренние источники (или стоки), которые снабжают среду новой массой, уравнение неразрывности, как известно, принимает вид:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = \pm e, \quad (7.102)$$

где e — интенсивность источников (количество вещества, вытекающего за единицу времени из источника или втекающего в сток); при этом полное число частиц должно быть переменным.

В релятивистском случае при внутренних источниках уравнение неразрывности изменится, а значит, изменится и тензор энергии-импульса таким образом, что ковариантная производная от классического тензора будет равна не нулю, а некоторой плотности силы $T^k_{i;k} = f_i$, где $T^{*k}_{i;k} = T^k_{i;k} + \xi^k_{i;k} = 0$. Здесь T^{*k}_i и T^k_i — новый и старый тензоры энергии-импульса; ξ^k_i — добавка к старому тензору.

Таким образом,

$$T_{i;k}^k = -\xi_{i;k}^k = f_i.$$

Обычный тензор энергии-импульса получается, как известно, варьированием некоторой скалярной величины, характеризующей среду. Если среда подчиняется закону Паскаля, то этой величиной является давление p .

Попробуем для некоторого общего случая, когда могут присутствовать источники энергии, варьировать не давление, а пока его произвольную функцию $\Psi(p)$. Однако этот подход не самый общий: он соответствует, как показано ниже, однородному распределению источников. Итак, пусть плотность лагранжиана среды

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{-g} \Psi(p). \quad (7.103)$$

Известно, что

$$(1/2) \sqrt{-g} T_{ik}^* = -\partial \mathcal{L}_M / \partial g^{ik}, \quad (7.104)$$

$$\delta \mathcal{L} = [(-1/2) g_{ik} \Psi \delta g^{ik} + \Psi_p \delta p] \sqrt{-g},$$

поскольку $p = (W - E)/V$; $dW = T d\sigma + V dp + \mu dN$.

Здесь W , E , σ , V — полные значения соответственно энтальпии, энергии, энтропии и объема во всей рассматриваемой области.

Если все термодинамические величины рассчитать на одну частицу, то получим

$$dW_N = V_N dp + T d\sigma_N,$$

где $W_N = W/N$; $V_N = V/N$; $\sigma_N = \sigma/N$. Отсюда $dp = (dW_N - T d\sigma_N)/V_N$. В дальнейшем индекс N будет опущен.

Рассмотрим пока частную задачу, полагая, что $T = T(p)$; $\sigma = \sigma(p)$; $V = V(p)$. Тогда

$$dW = V dp + T d\sigma = V dp [1 + T d\sigma/V dp] = V dp \bar{\Psi}(p). \quad (7.105)$$

Далее допустим, что, как и в случае изэнтропических давлений, при $f_i = 0$ существует псевдопотенциал скорости

$$W u_i = c \partial s / \partial x^i = c s_i,$$

где s — действие, рассчитанное на одну частицу. После соответствующих вычислений правомерность этого допущения будет доказана. Из (7.105) следует, что $\delta p = \delta W / V \bar{\Psi}$. Поскольку $u_i u^i = g^{ik} u_i u_k = -1$, запишем

$$W^2 = -c^2 g^{ik} s_i s_k; \quad W = ic \sqrt{-g^{ik} s_i s_k}.$$

Далее

$$\delta W = \frac{ics_i s_k \delta g^{ik}}{2 \sqrt{-g^{ab} s_a s_b}} = -W u_i u_k \delta g^{ik};$$

$$\delta p = -(p + \varepsilon) u_i u_k \delta g^{ik} / 2 \bar{\Psi}(p);$$

$$\delta \mathcal{L} = -(\sqrt{-g}/2) [g_{ik} \Psi + (\Psi_p / \bar{\Psi})(p + \varepsilon) u_i u_k] \delta g^{ik};$$

$$T_{ik}^* = (\Psi_p / \bar{\Psi})(p + \varepsilon) u_i u_k + g_{ik} \Psi.$$

Запишем этот тензор в виде

$$T_i^{*k} = (\Psi_p/\bar{\Psi}) [(p + \varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k p] + \delta_i^k (\Psi - p \Psi_p/\bar{\Psi}),$$

или

$$T_i^{*k} = (\Psi_p/\bar{\Psi}) T_i^k + \delta_i^k (\Psi - p \Psi_p/\bar{\Psi}).$$

Можно показать, что уравнения Эйнштейна примут вид [166]:

$$\begin{aligned} R_i^k - (1/2) \delta_i^k R &= \kappa_0 \frac{\Psi_p}{\bar{\Psi}} [T_i^k + \delta_i^k (\Psi \bar{\Psi}/\Psi_p - p)] = \\ &= \kappa [(p^* + \varepsilon^*) u_i u^k + \delta_i^k p^*]. \end{aligned}$$

Здесь $\kappa = \kappa_0 \Psi_p/\bar{\Psi}$. Полезно отметить, что

$$\left. \begin{aligned} R_0^0 - R/2 &= \kappa_0 (\Psi_p/\bar{\Psi}) (p + \varepsilon) u_0 u^0 + \kappa_0 \Psi; \\ R/\kappa &= (\Psi_p/\bar{\Psi}) (p + \varepsilon) - 4\Psi = \varepsilon^* - 3p^*. \end{aligned} \right\} \quad (7.106)$$

Запишем теперь (см. [166]) систему уравнений для $T_{i;k}^k = f_i$ в явном виде

$$\begin{aligned} (p + \varepsilon) \frac{d^* u_i}{ds} + u_i \frac{dp}{ds} + \frac{\partial p}{\partial x^i} &= f_i + u_i u^k f_k; \\ \frac{d\varepsilon}{ds} + (p + \varepsilon) \left[u^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right] &= -u^k f_i, \end{aligned}$$

где d^*/ds — ковариантная производная от вектора. Поскольку

$$\begin{aligned} f_i + u_i u^k f_k &= -(\bar{\Psi} - 1) (\partial p / \partial x^i + u_i dp/ds); \\ -u^i f_i &= (\bar{\Psi} - 1) \frac{dp}{ds} - \frac{d \ln (\Psi_p/\bar{\Psi})}{ds} (p + \varepsilon), \end{aligned}$$

система (7.106) примет вид:

$$(p + \varepsilon) \frac{d^* u_i}{ds} + u_i \frac{dp}{ds} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = (1 - \bar{\Psi}) \left(\frac{\partial p}{\partial x^i} + u_i \frac{dp}{ds} \right),$$

или

$$\begin{aligned} (p + \varepsilon) \frac{d^* u_i}{ds} + \bar{\Psi} \left[u_i \frac{dp}{ds} + \frac{\partial p}{\partial x^i} \right] &= 0; \\ \frac{d\varepsilon}{ds} + (p + \varepsilon) \left[u^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right] &= (\bar{\Psi} - 1) \frac{dp}{ds} - \frac{d \ln (\Psi_p/\bar{\Psi})}{ds} (p + \varepsilon). \end{aligned}$$

Уравнения в центрально-симметричной системе отсчета. Запишем метрику в виде

$$-ds^2 = -\exp \sigma c^2 d\tau^2 + \exp \omega dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

где $r = r(c\tau, r_0) = \exp(\mu/2)$. Тогда основные уравнения движения для сопутствующей системы отсчета при $u = 0$ примут вид:

$$\frac{(\varepsilon + p)_\tau}{p + \varepsilon} + \frac{\omega_\tau}{2} + \frac{2r_\tau}{r} = \frac{p_\tau}{p} \left[\frac{\Psi_p}{p + \varepsilon} - \frac{d \ln (\Psi_p/\bar{\Psi})}{d \ln p} \right]; \quad (7.107)$$

$$\bar{\Psi} p_{r_0}/(p + \varepsilon) + \sigma_{r_0}/2 = 0. \quad (7.108)$$

При $\bar{\Psi} = 1$, $\Psi = p$, $\Psi_p = 1$ приходим к обычным уравнениям:

$$\frac{\varepsilon_\tau}{p + \varepsilon} + \frac{\omega_\tau}{2} + \frac{2r_\tau}{r} = 0; \quad \frac{pr_0}{p + \varepsilon} + \frac{\sigma r_0}{2} = 0.$$

Запишем полевые уравнения, полагая

$$R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa_0 T_i^{*k} = \kappa [(p^* + \varepsilon^*) u_i u^k + \delta_i^k p^*].$$

Они, как известно, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0 T_1^1 &= \exp(-\omega) (r'^2/r^2 + r' \sigma'/r) - \\ &- \exp(-\sigma) (2\ddot{r}/r + r^2/r^2 - \dot{r}\dot{\sigma}/r) - 1/r^2; \\ \kappa_0 T_2^2 &= \kappa_0 T_3^3 = \kappa_0 p^* = (1/4) \exp(-\omega) \times \\ &\times (2\sigma'' + \sigma'^2 + 4r''/r - 2r' \omega'/r + 2r' \sigma'/r - \sigma' \omega') + \\ &+ (1/4) \exp(-\sigma) (\dot{\omega}\dot{\sigma} + 2\dot{r}\dot{\sigma}/r - 2\dot{r}\dot{\omega}/r - \\ &- 2\ddot{\omega} - \dot{\omega}^2 - 4\ddot{r}/r); \\ \kappa_0 T_0^0 &= \exp(-\omega) (2r''/r + r'^2/r^2 - \omega' r'/r) - \\ &- \exp(-\sigma) (\dot{r}^2/r^2 + \dot{r}\dot{\omega}/r) - 1/r^2; \\ \kappa T_0^1 &= (1/2) \exp(-\omega) (r' \dot{\omega}/r + \dot{r}\sigma'/r - 2\dot{r}'/r). \end{aligned} \right\} \quad (7.109)$$

Приложения к космологии и частицам. Пусть все величины, кроме $r = a(c\tau) A(r_0)$, зависят только от τ . Положим, что $c\tau = \sqrt{a^2 - a_0^2}$; $r = \sqrt{a_0^2 + c^2\tau^2} A(r_0)$, т. е. будем считать, что скорость расширения Метагалактики асимптотически приближается к световой: $r_{c\tau} = v/c = \sqrt{1 - a_0^2/a^2}$. В сопутствующей системе в уравнениях (7.109) надо положить $u_i = 0$. Тогда из уравнения (7.108) получим $\sigma_{r_0} = 0$, откуда $\sigma = 0$. Следовательно, система отсчета становится синхронно-сопутствующей; при этом уравнения (7.109) запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0 p^* &= \exp(-\omega) (r''/r - r' \omega'/2r) - (1/4) (2\dot{r}\dot{\omega}/r + 2\ddot{\omega} + \dot{\omega}^2 + 4\ddot{r}/r); \\ -\kappa_0 \varepsilon^* &= \exp(-\omega) (2r''/r + r'^2/r^2 - \omega' r'/r) - \\ &- \dot{r}^2/r^2 + \dot{r}\dot{\omega}/r - 1/r^2; \\ r' \dot{\omega}/r - 2\dot{r}'/r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.110)$$

Запишем теперь уравнение (7.107) как

$$\frac{(\varepsilon + p)_a}{\varepsilon + p} + \frac{\omega_a}{2} + \frac{2r_a}{r} = \frac{p_a}{p} \left[\frac{\bar{\Psi}_p}{p + \varepsilon} - \frac{d \ln(\Psi_p/\bar{\Psi})}{d \ln p} \right].$$

Уравнение (7.108) удовлетворяется тождественно. Последнее уравнение в системе (7.110) сразу же интегрируется: $\exp(-\omega) r'^2 = (1 + f)$,

где $\dot{f} = \dot{f}(r_0) = \dot{f}(x)$, причем $1 + \dot{f} > 0$. Далее, исключая ω , можно первые два уравнения системы (7.110) написать в виде

$$\kappa_0 p^* = \dot{f}'/2rr' - [\ddot{r}/r + \ddot{r}/r' + (\dot{r}'/r') \dot{r}/r];$$

$$\kappa \varepsilon^* = [-2(\dot{r}'/r') \dot{r}/r + \dot{r}^2/r^2] - (\dot{f}/r^2 + \dot{f}'/rr').$$

Положив $\dot{f} = -\beta_1 A^2(r_0)$, где для $\beta_1 = 1, 0, -1$ величина $A = \sin \chi, \chi, \operatorname{sh} \chi$ соответственно, и приняв во внимание, что $r = aA(r_0)$, найдем при $a^2 = a_0^2 + c^2 \tau^2$, $a_0 = \text{const}$, что

$$p^* = -(1/\kappa_0 a^2) (1 + \beta_1 + a_0^2/a^2);$$

$$\varepsilon^* = (3/\kappa_0 a^2) (1 + \beta_1 - a_0^2/a^2).$$

Из (9) компоненты и свертки получим:

$$(\Psi_p/\bar{\Psi})(p + \varepsilon) - \Psi = (3/\kappa_0 a^2) (1 + \beta_1 - a_0^2/a^2);$$

$$(\Psi_p/\bar{\Psi})(p + \varepsilon) - 4\Psi = (6/\kappa_0 a^2) (1 + \beta_1),$$

откуда

$$\Psi = -(1/\kappa_0 a^2) (1 + \beta_1 + a_0^2/a^2) = p^*;$$

$$p + \varepsilon = (2\bar{\Psi}/\kappa_0 a^2 \Psi_p) (1 + \beta_1 - 2a_0^2/a^2).$$

Причем равенство (7.107) тождественно выполняется.

Рассмотрим уравнение

$$dW = \bar{\Psi} V dp = d[V(p + \varepsilon)].$$

Поскольку

$$\bar{\Psi} = \frac{\Psi_p(p + \varepsilon) \kappa_0 a^2}{2(1 + \beta_1 - 2a_0^2/a^2)};$$

$$\frac{dW}{W} = \frac{\bar{\Psi} V dp}{W} = \frac{da}{a} \frac{(1 + \beta_1)/2 + a_0^2/a^2}{(1 + \beta_1)/2 - a_0^2/a^2},$$

интегрируя, получаем

$$W = \frac{2}{1 + \beta_1} \frac{a}{a_0} W_0 \left(\frac{1 + \beta_1}{2} - \frac{a_0^2}{a^2} \right).$$

Далее находим

$$\kappa = \kappa_0 \Psi_p / \bar{\Psi} = 2(1 + \beta_1) a_0 V / W_0 a^3. \quad (7.111)$$

Остается определить само $\bar{\Psi}$:

$$\bar{\Psi} = \kappa_0 \Psi_p W_0 a^3 / 2(1 + \beta_1) a_0 V_0.$$

Предположим, что

$$V = V_0 a / a_0; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const} \quad (7.112)$$

(ниже правомерность этого предположения будет доказана). Тогда $\bar{\Psi} = \kappa_0 \Psi_p W_0 a^2 / (1 + \beta_1) V_0$, и поскольку $\Psi_p = \Psi_a / p_a$, запишем

$$\Psi_a = \frac{4}{\kappa_0 a^2} \left[\frac{1 + \beta_1}{2} + \frac{a_0^2}{a^2} \right].$$

Из формулы $p = -\varepsilon + W/V = -\varepsilon + (W_0/V_0) [1 - 2a_0^2/a^2 \times (1 + \beta_1)]$ следуют соотношения

$$p_a = \frac{4a_0^2 W}{a^3 (1 + \beta_1) V_0}; \quad \Psi_p = \frac{V_0}{W_0} \frac{(1 + \beta_1) [(1 + \beta_1)/2 + a_0^2/a^2]}{a_0^2 \kappa_0},$$

и, следовательно,

$$\bar{\Psi} = \frac{a^2}{2a_0^2} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} + \frac{a_0^2}{a^2} \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 + \beta_1}{2} \frac{a^2}{a_0^2} \right].$$

Определим теперь энтропию σ . Поскольку

$$\bar{\Psi} = 1 + \frac{T d\sigma}{V dp} = \frac{d\sigma}{c_p} \frac{W}{V dp} = 1 + \frac{d\sigma}{c_p} \frac{W \bar{\Psi}}{dW} \quad (c_p T = W),$$

находим

$$\frac{d\sigma}{c_p} = \frac{\bar{\Psi} - 1}{\bar{\Psi}} \frac{dW}{W} = \frac{[(1 + \beta_1)/2] a^2/a_0^2 - 1}{[(1 + \beta_1)/2] a^2/a_0^2 + 1} \frac{da}{a} \frac{[(1 + \beta_1)/2] a^2/a_0^2 + 1}{[(1 + \beta_1)/2] a^2/a_0^2 - 1} = \frac{da}{a}.$$

Отсюда получаем

$$\int d(\sigma - \sigma_0)/c_p = \ln(a/a_0),$$

т. е. энтропия, как и следовало ожидать, растет со временем. Обоснуем теперь предположение (7.112). Из (7.111) вытекает, что

$$\kappa_0 = 2(1 + \beta_1) V_0/W_0 a^2.$$

Воспользуемся фундаментальными соотношениями $2G/c^2 a = 2G\hbar a/c^3 \lambda^3 = \hbar/mc\lambda = 1$. Поскольку $G = \kappa c^4/8\pi$, отсюда следует:

$$E_M = \hbar c a^2/\lambda^3 = E a^2/\lambda^2; \quad E_M/E = a^2/\lambda^2 = N;$$

$$n \equiv N/V_M = N\beta a^3 = 1/\beta a^2 \lambda,$$

где E_M — энергия Метагалактики; E — энергия нуклона; $\beta = \text{const}$ характеризует тип пространства. При измерениях мы фиксируем λ и массу вещества в единице объема, т. е. полагаем $\rho = \text{const}$, поэтому $nm = \rho = \text{const}$, или $nE = \varepsilon = E_M/\beta a^3 = E/\beta a \lambda^2 = \varepsilon_0 = \text{const}$, откуда

$$n = 1/\beta a \lambda^2; \quad E_M = \beta \varepsilon_0 a \lambda^2; \quad \hbar = E\lambda/c = \beta \varepsilon_0 \lambda^3 a/c.$$

Далее находим

$$V = \beta a^3 \lambda^2/a^2 = \beta a \lambda^2 = V_0 a/a_0;$$

$$\kappa = 4\pi/\beta \varepsilon_0 a^2 = 4\pi V/\beta^2 \varepsilon_0 a^3 \lambda^2 = 2(1 + \beta_1) a_0 V / W_0 a^3 = 2(1 + \beta_1) V_0/W_0 a^2,$$

откуда следует

$$W_0 = \beta^2 \varepsilon_0 a_0 \lambda^2 (1 + \beta_1)/2\pi; \quad \beta^2 \lambda^2 a_0 = V_0.$$

Таким образом, правомерность сделанных предположений [см. (7.112)] доказана. Теперь можно написать

$$p = \varepsilon_0 [-1 + \beta (1 + \beta_1)/2\pi - \beta a_0^2/\pi a^2].$$

Определим

$$\varepsilon_0 = 4\pi/\beta a_0^2 \kappa_0; \quad W_0 = 2\beta (1 + \beta_1) a_0/\kappa_0.$$

Здесь $\kappa = \kappa_0 a_0^2/a^2$; $p = (4/\kappa_0 a_0^2) [(1 + \beta_1)/2 - a_0^2/a^2 - \pi/\beta]$; $p_a = 3/\kappa a^3$. Найдем зависимость $\Psi = \Psi(p)$. Поскольку

$$\Psi = -\frac{\beta \varepsilon_0}{4\pi} \frac{a_0^2}{a^2} \left(1 + \beta_1 + \frac{a_0^2}{a^2}\right); \quad \frac{a_0^2}{a^2} = \frac{1 + \beta_1}{2} - \frac{\pi}{\beta} \left(1 + \frac{p}{\varepsilon_0}\right),$$

получим

$$\Psi = p - \frac{p}{2} \left(1 - \beta_1 + \frac{\pi}{\beta}\right) - \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\pi}{\beta} \frac{p^2}{\varepsilon_0^2} - \\ - \frac{\beta \varepsilon_0}{4\pi} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} - \frac{\pi}{\beta}\right) \left[\frac{3}{2} (1 + \beta_1) - \frac{\pi}{\beta}\right],$$

откуда следует, что $\Psi_p = (1 + \beta_1)/2 - (\pi/2\beta) (1 + p/\varepsilon_0)$. Однако $1 + p/\varepsilon_0 = \beta (1 + \beta_1)/2\pi - (\beta/\pi) a_0^2/a^2$, поэтому $\Psi_p = (1/2) [(1 + \beta_1)/2 + a_0^2/a^2]$. Положив $a_0 = \lambda$, нетрудно получить

$$\Psi_p = \left(\frac{1 + \beta_1}{2} + \frac{a_0^2}{a^2}\right) \frac{(1 + \beta_1) W_0}{\kappa_0 a_0^2 W_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} + \frac{a_0^2}{a^2}\right).$$

Выразим κ через κ_0 , a_0^2 , a^2 :

$$\kappa = \kappa_0 \Psi_p / \bar{\Psi} = \kappa_0 a_0^2/a^2 = \kappa_0/N.$$

Посмотрим теперь, как изменяются параметры элементарных частиц — гравитонов и планкеонов; если ε , c и λ постоянны; $\hbar = \beta \varepsilon_0 \lambda^3 a/c \sim a$; $\varepsilon_0 = 4\pi/\beta a_0^2 \kappa_0$. Масса элементарной частицы

$$m = \hbar/c\lambda \sim a.$$

Вычислим теперь L и m_L :

$$G \sim a^{-2}; \quad L = \sqrt{2G\hbar/c^3} \sim a^{-1/2}; \quad m_L = \hbar/Lc \sim a^{3/2}.$$

Найдем

$$m_g = \hbar/ca = \text{const.}$$

Теперь можно написать

$$M = c^2 a/2G = c^2 a^3/2G_0 \lambda^2 \sim a^3.$$

Таким образом, за три постоянные масштабные разноразмерные величины можно принять $a_0 = \lambda \sim 10^{-13}$ см, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, $m_g \sim 10^{-66}$ г.

Модификация уравнений поля. Уравнения поля выгодно записать в виде

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \kappa T_i^k + \kappa_0 \delta_i^k \left(\Psi - \frac{a_0^2}{a^2} p\right),$$

где $T_i^k = (p + \varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k p$. Поскольку

$$\Psi = -\frac{1}{\kappa_0 a^2} \left(1 + \beta_1 \frac{a_0^2}{a^2}\right); \quad p = \frac{4}{\kappa_0 a_0^2} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} - \frac{a_0^2}{a^2} - \frac{\pi}{\beta}\right),$$

получим

$$\kappa_0 \left(\Psi - \frac{a_0^2}{a^2} p\right) = -\frac{R}{2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{4\pi}{\beta} + 3 \frac{a_0^2}{a^2}\right),$$

и уравнения поля примут вид:

$$R_i^k = \kappa T_i^k + \frac{2\pi}{\beta(1 + \beta_1)} \frac{\delta_i^k R}{3} + \frac{a_0^2 R^2}{12(1 + \beta_1)^2} \delta_i^k.$$

Свернем это выражение: $R = \kappa (3p - \varepsilon) + 8\pi R/3\beta (1 + \beta_1) + a_0^2 R^2/3 (1 + \beta_1)^2$. Поскольку

$$3p - \varepsilon = \frac{12}{\kappa_0 a_0^2} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} - \frac{a_0^2}{a^2} - \frac{\pi}{\beta} \right) - \frac{4\pi}{\beta a_0^2 \kappa_0};$$

$$\kappa (3p - \varepsilon) = R - 8\pi R/3\beta (1 + \beta_1) - a_0^2 R^2/3 (1 + \beta_1)^2,$$

получаем тождество, что вполне естественно.

Термодинамика. Вычислим (восстановим индекс N) энтропию частицы, ее температуру и выделяемое на одну частицу тепло. Из $d\sigma_N/c_{pN} = da/a$; $c_{pN} = c_{p0N}a/\lambda$ следует, что $d\sigma_N/c_{p0N} = da/\lambda$; $\sigma_N/c_{p0N} = \sigma_{0N}/c_{p0N} + a/\lambda$, где c_{p0N} , как и c_{pN} , рассчитаны на одну частицу: $c_{p0N} = c_{p0}/N_A$ (N_A — число Авогадро). Полагая $\sigma_{0N} = 0$, найдем $\sigma_N = c_{p0N}a/\lambda = c_{pN} = c_p/N_A \sim 10^8/10^{24} \sim 10^{-16}$. Далее вычислим

$$\frac{d\theta_N}{da} = \frac{T d\sigma_N}{da} = (\bar{\Psi} - 1) \frac{V_N dp}{da} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} \frac{a^2}{a_0^2} - 1 \right) \frac{V_N dp}{da};$$

$$V_N \frac{dp}{da} = V_{0N} \frac{a}{a_0} \frac{8}{\kappa_0 a^3} = \frac{8V_{0N}}{\kappa_0 a_0 a^2} = \frac{8\beta a_0^2}{\kappa_0 a^2}.$$

Отсюда получим $d\theta_N/da = (4\beta/\kappa_0) [(1 + \beta_1)/2 - a_0^2/a^2]$. Интегрируя, находим

$$\theta_N = \frac{4\beta a}{\kappa_0} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} + \frac{a_0^2}{a^2} \right); \quad \theta_0 = N\theta_N = \frac{4\beta a}{\kappa} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} + \frac{a_0^2}{a^2} \right).$$

Поскольку

$$W_N = W_{0N} \frac{a}{a_0} \frac{2}{1 + \beta_1} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} - \frac{a_0^2}{a^2} \right) = \frac{4\beta a}{\kappa_0} \left(\frac{1 + \beta_1}{2} - \frac{a_0^2}{a^2} \right),$$

то $\theta_N = W_N + 8\beta\lambda^4/\kappa a^3$. Известно, что $Td\sigma = d\theta$, поэтому

$$T = \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{4\beta\lambda}{a_0} \frac{(1 + \beta_1)/2 - a_0^2/a^2}{c_{0N}},$$

или

$$\frac{4\pi\lambda}{a_0} \frac{[(1 + \beta_1)/2 - a_0^2/a^2] N_A}{c_{p0}} = \frac{4\pi\lambda^2}{\kappa a b} = \frac{4\pi\lambda^2 N_A}{\kappa a c_p},$$

где $b = (1/T) (2/3) mc^2 = 10^{-3}$; отсюда $m \sim 10^{-24}$ г, что соответствует массе нуклона (здесь $b = R/N_A$).

Вычислим химический потенциал $\mu = W_N - T\sigma_N = W_N \times (1 - \sigma_N/c_{pN})$. Поскольку $\sigma_N/c_{pN} = (\sigma_{0N}/c_{p0N}) (c_{p0N}/c_{pN}) = (\sigma_N/c_{p0N}) \times \lambda/a = \lambda/a (\sigma_{pN}/c_{p0N} + a/\lambda)$, получим

$$1 - \frac{\sigma_N}{c_{pN}} = - \frac{\lambda}{2} \frac{\sigma_{0N}}{2c_{p0N}};$$

$$\mu = - W_{0N} \frac{\sigma_{0N}}{c_{p0N}} \left(1 - \frac{2}{1 + \beta_1} \frac{\lambda^2}{a^2} \right);$$

$$\Phi = N\mu = - \sigma_{0N} T_0 [1 - 2\lambda^2/(1 + \beta_1) a^2].$$

Химический потенциал отрицателен, как должно быть для бозонов. Если $\sigma_{0N} = 0$, то $\mu = 0$, причем $T = T_0 \sim 10^{130}$, $b_0 = b\lambda/a \sim 10^{-56}$ эрг/град, $N_a = N_{a0}\lambda/a = (1/m_g) \lambda/a \sim 10^{24}$ град $^{-1}$, $R_0 = bN_a = = b_0/m_g = (2/3) c^2/T_0 = \text{const}$ [или $c_{v0} = (3/2) R_0$].

В заключение приведем полезные соотношения, вытекающие из предыдущих:

$$p + \varepsilon = (2/\kappa_0 a_0^2) (1 + \beta_1 - 2a_0^2/a^2); (p + \varepsilon)/(p^* + \varepsilon^*) = a^2/a_0^2 = N.$$

Укажем, что решение определено при $a \geq \sqrt{2} a_0$; тогда $c\tau_0 = a_0 = = \lambda$. Поскольку $\varepsilon = 4\pi/\beta\kappa_0 a_0^2 = 3/\kappa a^2$, $p = (2/\kappa_0 a_0^2) (1 + \beta_1 - - 2a_0^2/a^2 - 2\pi/\beta)$, то $p/\varepsilon = k - 1$, где $k = (1 + \beta_1 - 2a_0^2/a^2) \beta/2\pi$. Отсюда, полагая $\beta_1 = 0$, $\beta = (4/3)\pi$, найдем $k = (2/3) (1 - 2a_0^2/a^2)$. Итак, получаем:

$$\varepsilon + 3p = -4a_0^2/\kappa a^4; \varepsilon^* + 3p^* = -6a_0^2/\kappa a^4.$$

Эти и приведенные выше соотношения характеризуют модель с переменным числом частиц.

Глава 8

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ОТО И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ

8.1. РЕШЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА И ТОЛМЕНА [67]

Метрика поля Шварцшильда имеет вид:

$$-ds^2 = -c^2 \exp \nu dt^2 + \exp \lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (8.1)$$

где $\exp \nu = \exp (-\lambda) = 1 - r_g/r$ ($r_g = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус данного тела). При $r \rightarrow r_g$ решение теряет смысл, хотя $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$ не имеет особенностей. При $c \rightarrow \infty$ (переход к теории Ньютона) $r_g \rightarrow 0$, появляется обычная особенность в центре при $r = 0$. Здесь же эта особенность как бы разделяет пространство на две области $r > r_g$ и $r < r_g$.

Пусть

$$cdt = cd\bar{t} + A(r) dr, \quad (8.2)$$

тогда (8.1) примет вид:

$$-ds^2 = - (1 - r_g/r) c^2 d\bar{t}^2 - (1 - r_g/r) A^2 dr^2 + dr^2 / (1 - r_g/r) - - 2A (1 - r_g/r) cd\bar{t}dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8.3)$$

Предположим, что

$$1/(1 - r_g/r) - (1 - r_g/r) A^2 = 1. \quad (8.4)$$

Тогда

$$A = \sqrt{r_g/r} / (1 - r_g/r), \quad (8.5)$$

и мы имеем

$$-ds^2 = - (1 - r_g/r) c^2 d\bar{t}^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \mp 2 \sqrt{r_g/r} cd\bar{t}dr. \quad (8.6)$$

Здесь метрика имеет евклидову чисто пространственную часть, и пространственная особенность исчезает. Ниже будет детально рассмотрена пространственная особенность метрики (8.1), а пока перейдем к изучению более общего случая, когда только $p = 0$, но $\varepsilon \neq 0$, т. е. $T_i^k \neq 0$. Эту задачу решил Толмен. Рассмотр-

рим ее смысл в сопутствующей системе отсчета. Основные уравнения для поля и движения выберем в виде

$$\sigma' = -2p'/(p + \varepsilon); \quad (8.7)$$

$$(1/2) \exp(-\omega) (\mu''/2 + \mu' \sigma') - \exp(-\sigma) [\ddot{\mu} - (1/2) \dot{\mu} \dot{\sigma} + (3/4) \dot{\mu}^2] - \exp(-\mu) = 0; \quad (8.8)$$

$$\dot{\mu}' + \dot{\mu} \mu' = \dot{\omega} \dot{\mu} + \sigma' \dot{\mu}; \quad (8.9)$$

$$\kappa \varepsilon = \exp(-\mu) + (1/2) \exp(-\sigma) (\dot{\omega} \dot{\mu} + \mu'/2) + \exp(-\omega) [\mu'' + (3/4) \mu'^2 - \mu' v'/2]. \quad (8.10)$$

[Остальные уравнения поля, как можно показать, после найденного решения удовлетворяются тождественно так же, как и уравнение $\dot{\omega} + 2\dot{\mu} = -2\varepsilon/(p + \varepsilon)$.] Здесь как мы поступали раньше, удобно принять

$$r = r(R, c\tau) = \exp(\mu/2). \quad (8.11)$$

Поскольку $p = 0$, то $\sigma' = 0$, $\sigma = 0$, и эта система при $p = 0$ будет также синхронной. В синхронно-сопутствующей системе $p' = 0$, $p = p(\tau)$, что является менее жестким условием, чем $p = 0$. (Произвольную функцию времени, не ограничивая общности, можно принять равной нулю.)

Уравнение (8.9) легко интегрируется, в результате чего получается

$$\exp \omega = r'^2/(1 + f), \quad (8.12)$$

где $f = f(R)$; $1 + f > 0$. Уравнение (8.8), если подставить туда (8.12), дает соотношение

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f = 0,$$

первый интеграл которого есть:

$$\dot{r} = \sqrt{f + F(R)/r}, \quad (8.13)$$

где $F(R)$ — произвольная функция. Еще раз интегрируя (8.13), находим, что

$$c(\tau - \tau_0) = \begin{cases} \frac{1}{f} \sqrt{fr^2 + Fr} + \frac{F}{\sqrt{-f}} \arcsin \sqrt{\frac{-fr}{F}}, & f < 0; \\ \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{F^{1/2}}, & f = 0; \\ \frac{1}{f} \sqrt{fr^2 + Fr} + \frac{F}{\sqrt{f}} \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{fr}{F}}, & f > 0. \end{cases} \quad (8.14)$$

Если в уравнение (8.10) подставить $\exp \omega = r'^2/(1 + f)$ и исключить с помощью (8.13) f , то найдем

$$\kappa \varepsilon = F'/r'r. \quad (8.15)$$

Энтропия при $p = 0$ ($T = 0$) также равна нулю. [Кстати, если проинтегрировать $\dot{\omega} = 4\dot{r}/r = -2\varepsilon/\varepsilon$, то найдем $\kappa \varepsilon r^2 = A(r) \exp(-\omega/2) = A(r) (1 + f)^{1/2}/r$, откуда $F' = A(r) \sqrt{1 + f}$.]

Найдем решение Толмена в центрально-симметричной системе отсчета, чего обычно не делают. Для этой цели систему уравнений сохранения (движения) запишем в координатах m, r , причем при $p = 0$ $m = m(R)$, т. е. здесь m играет роль лагранжевой координаты. Эта система уравнений имеет вид:

$$\frac{u u_r}{c^2 \theta^2} + \frac{\kappa m/r}{2r(1 - \kappa m/r)} = 0; \quad (8.16)$$

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon} + \frac{2}{r} + \frac{u_r + \varepsilon r^2 u_m}{\theta^2 u} + \frac{\kappa}{\varepsilon r(1 - \kappa m/r)} \left(\frac{m}{r} - \varepsilon r^2 \right) = 0. \quad (8.17)$$

Из уравнения (8.16) находим, что

$$\frac{d\theta^2}{\theta^2} = \frac{d(1 - \kappa m/r)}{1 - \kappa m/r};$$

здесь $m = \int_0^r \frac{\varepsilon r^2 dr}{\theta^2}$, откуда

$$1 - u^2/c^2 = \Phi(m) (1 - \kappa m/r). \quad (8.18)$$

Уравнение (8.17) определяет ε :

$$\frac{(\varepsilon r^2)_r}{\varepsilon r^2} + \frac{\varepsilon r^2}{2} \left[\frac{u_m^2}{\theta^2 c^2} - \frac{\kappa}{r(1 - \kappa m/r)} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{u_r^2}{\theta^2 u^2} + \frac{\kappa m/r^2}{1 - \kappa m/r} \right],$$

что после исключения u , u_r и u_m дает

$$\frac{(\varepsilon r^2)_r}{\varepsilon r^2} + \frac{\varepsilon r^2}{2} \frac{(\kappa/2)\Phi - \Phi'/\Phi}{1 - \Phi(1 - \kappa m/r)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa m}{r^2 \Phi} \right) / \left[1 - \Phi \left(1 - \frac{\kappa m}{r} \right) \right]. \quad (8.19)$$

Решение этого уравнения (уравнения Бернулли) имеет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon r^2} = \sqrt{1 - \Phi \left(1 - \frac{\kappa m}{r} \right)} \left[M^*(m) + \frac{1}{2} \int \frac{(\kappa \Phi/r - \Phi'/\Phi) dr}{[1 - \Phi(1 - \kappa m/r)]^{3/2}} \right], \quad (8.20)$$

где $\Phi' = d\Phi/dm$. Определим $t = t(m, r)$ с помощью уравнения

$$(r^2 \varepsilon / \theta^2) t_m + t_r = 0,$$

или $r^2 \varepsilon t_m / \Phi(1 - \kappa m/r) + t_r = 0$, что дает $(\Phi dm / r^2 \varepsilon)(1 - \kappa m/r) = dr$.

Решив эти уравнения, найдем

$$\frac{dm}{dr} = \frac{r^2 \varepsilon}{\Phi(1 - \kappa m/r)}; \quad dt = 0; \quad t = t(m, r). \quad (8.21)$$

Далее получим

$$A = \exp [(\lambda - \nu)/2] = ut_r,$$

где $\exp(-\lambda) = 1 - \kappa m/r$; это дает

$$\exp(-\nu/2) = \sqrt{1 - \kappa m/r} ut_r. \quad (8.22)$$

Полученные формулы определяют решение Толмена в центрально-симметричной системе отсчета. Свяжем решение Шварцшильда в центрально-симметричной системе отсчета с решением Толмена в синхронно-сопутствующей системе отсчета. При этом для полноты выводов и для методической пользы повторим некоторые уже известные преобразования.

8.2. О СВЯЗИ МЕТРИК ТОЛМЕНА И ШВАРЦШИЛЬДА [167]

Как известно, метрика Толмена имеет вид:

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \exp \mu dR^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8.23)$$

где

$$\exp \mu = \left(\frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 \frac{1}{1 + f(R)} = \frac{r'^2}{1 + f}; \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

причем

$$1 + f > 0; \quad (\partial r / c \partial \tau)_R = \dot{r} = \sqrt{f + F(R)/r}, \quad (8.24)$$

где f и $\bar{F}$ — произвольные функции. Здесь R — лагранжева, а r — обычная координаты в центрально-симметричной системе отсчета; интегрируя (8.24), найдем:

$$fc[\tau - \tau_0] = \begin{cases} \sqrt{r(fr + F)} - (F/\sqrt{-f}) \arcsin \sqrt{-fr/F}, & f < 0; \\ (2/3)r^{3/2}/F^{1/2}, & f = 0 \\ \sqrt{r(fr + F)} - (F/\sqrt{-f}) \operatorname{arsh} \sqrt{fr/F}, & f > 0. \end{cases}$$

Перейдем для удобства дальнейших вычислений к независимым переменным r, R ; тогда

$$r' = -\frac{\tau_R}{\tau_r}; \quad \exp \mu = \frac{\tau_R^2}{\tau_r^2 (1+f)}; \quad c\tau_r = \frac{1}{\sqrt{f + F/r}}.$$

Перейдем от сопутствующей системы отсчета к центрально-симметричной

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 \exp \nu + \exp \lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Поскольку

$$d\tau = \tau_r dr + \tau_R dR; \quad dt = t_r dr + t_R dR,$$

запишем:

$$dR = \frac{dt - t_r dr}{t_R}; \quad d\tau = \frac{dr}{t_R} [t_R \tau_r - \tau_R t_r] + \frac{\tau_R}{t_R} dt.$$

Подставив эти значения в (8.23), получим

$$\begin{aligned} -ds^2 = -c^2 dt^2 \frac{c^2 \tau_R^2}{c^2 t_r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2 \tau_r^2 (1+f)} \right) + \frac{dr^2}{c^2 t_R^2} \left[c^2 \tau_R^2 \frac{c^2 t_r^2}{c^2 \tau_r^2 (1+f)} - \right. \\ \left. - (ct_R c\tau_R - ct_r c\tau_R) \right] + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

причем

$$(ct_R c\tau_r - ct_r c\tau_R) + ct_r c\tau_R / c^2 \tau_r^2 (1+f) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \exp \nu = \frac{c^2 \tau_R^2}{c^2 t_R} \left(1 - \frac{1}{c^2 \tau_r^2 (1+f)} \right); \quad \exp \lambda = \\ = \frac{c^2 \tau_R^2 c^2 t_r^2 / c^2 \tau_r^2 (1+f) - (ct_R c\tau_r - ct_r c\tau_R)^2}{c^2 t_R^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $c\tau_r = 1/\sqrt{f + F/r}$, после нескольких преобразований будем иметь:

$$ct_r = \exp \frac{\lambda - \nu}{2} \sqrt{\frac{1+f}{f + F/r}}; \quad ct_R = \frac{c\tau_R}{\sqrt{1+f}} \left(1 - \frac{F}{r} \right) \exp \frac{\lambda - \nu}{2}.$$

Из этих уравнений получаем:

$$\exp(-\lambda) = (1 - F/r); \quad \exp \nu = \frac{\tau_R^2}{t_R^2} \frac{1 - F/r}{1+f}.$$

Для определения $t = t(r, R)$ можно получить уравнение

$$ct_R \frac{1+f}{\sqrt{f + (F/r)(1 - F/r) c\tau_R}} - ct_r = 0, \quad (8.25)$$

причем

$$c\tau_R = \int \frac{\partial}{\partial R} \frac{dr}{\sqrt{f+F/r}} = c\tau_{0R} + \frac{f'}{f} \left[\frac{r}{\sqrt{f+F/r}} - \frac{1}{2} c(\tau - \tau_0) \right].$$

Зная $f = f(R)$; $F = F(R)$, найдем $t = t(r; R)$ и затем $v = v(r, R)$; $\lambda = \lambda(r, R)$, что определяет центрально-симметричную метрику для задачи Толмена. Вычислим $c\tau_R$ в более общем виде; так как

$$c\tau_r = (f + F/r)^{-1/2},$$

запишем

$$c\tau_{Rr} = -\frac{1}{2} \frac{f' + F'/r}{(f + F/r)^{3/2}}; \quad c\tau_R - c\tau_{0R} = -\frac{1}{2} \int \frac{(f' + F'/r) dr}{(f + F/r)^{3/2}}.$$

Поскольку

$$\int \frac{dr}{(f + F/r)^{1/2}} = \frac{r}{(f + F/r)^{1/2}} - \frac{F}{2} \int \frac{dr}{r(f + F/r)^{3/2}},$$

имеем

$$\int \frac{f dr}{(f + F/r)^{3/2}} = \frac{1}{f} \left[3(c\tau - c\tau_0) - \frac{2r}{(f + F/r)^{1/2}} \right].$$

Поэтому

$$c\tau_R - c\tau_{0R} = \frac{f'}{f} \left[-\frac{3}{2} (c\tau - c\tau_0) + \frac{r}{(f + F/r)^{1/2}} \right] + \frac{F'}{F} \left[-\frac{r}{(f + F/r)^{1/2}} + (c\tau - c\tau_0) \right].$$

При $F = r_g = \text{const}$

$$c\tau_R - c\tau_{0R} = (f'/f) \left[-\frac{3}{2} (c\tau - c\tau_0) + r/(f + F/r)^{1/2} \right].$$

Далее будут полезны следующие соотношения. Так как

$$ct_r = \sqrt{\frac{1+f}{f+F/r}} \exp \frac{\lambda - v}{2},$$

то

$$\left(\frac{\partial r}{c\partial t} \right)_R = \exp \frac{v - \lambda}{2} \sqrt{\frac{f + F/r}{1 + f}}. \quad (8.26)$$

Из (8.24) и (8.26) следует, что

$$\partial r / c\partial t = (\partial r / c\partial \tau) \exp [(\nu - \lambda)/2] / \sqrt{1 + f},$$

или

$$(\partial t / \partial \tau)_R = \sqrt{1 + f} \exp [(\lambda - \nu) / 2].$$

Введем скорости в обеих системах отсчета. Очевидно, что скорости относительно центрально-симметричной системы отсчета совпадают:

$$\begin{aligned} \frac{u}{c} &= \exp \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial r}{c\partial \tau} \right)_R = \frac{r'}{\sqrt{1+f}} \sqrt{f + \frac{F}{r}} \frac{\partial R}{\partial r} = \exp \frac{\lambda - \nu}{2} \left(\frac{\partial r}{c\partial t} \right)_R = \\ &= ct_r (\partial r / c\partial t) \sqrt{(f + F/r)/(1 + f)} = \sqrt{(f + F/r)/(1 + f)}. \end{aligned}$$

Скорость относительно сопутствующей системы отсчета

$$v/c = (\partial r / c \partial \tau)_R = \sqrt{f + F/r}. \quad (8.27)$$

Таким образом, $u/c = v/c \sqrt{1 + f}$, откуда

$$1 + f = \frac{v^2}{u^2}; \quad f = \frac{v^2}{u^2} - 1; \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{u^2} - \left(1 + \frac{F}{r}\right),$$

что дает связь между v и u :

$$v/c = (u/c) \sqrt{(1 - F/r)/(1 - u^2/c^2)}.$$

Обратная связь имеет вид:

$$u/c = (v/c) / \sqrt{1 + v^2/c^2 - F/r}.$$

Отсюда также следует, что

$$1 + f = \frac{1 - F/r}{1 - u^2/c^2}; \quad f = \left(\frac{u^2}{c^2} - \frac{F}{r} \right) \frac{1}{1 - u^2/c^2}; \quad \frac{F}{r} = 1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2}{u^2}.$$

Подставив выражения для f и F через u и v в (8.25), получим, что

$$ct_R = c\tau_R ct_r (v^2/c^2) (1 - u^2/c^2).$$

Приведенные соотношения полностью решают задачу о связи между двумя указанными системами отсчета и являются обобщением преобразований Лоренца. Попытки таких обобщений, содержащиеся в ряде работ, основаны на иных методах и, по нашему мнению, не совсем корректны. При $r_g = 0$ $u/c = v/c \sqrt{1 + v^2/c^2}$ или $v/c = u/c \sqrt{1 - u^2/c^2}$, $\sqrt{f} = (u/c) / \sqrt{1 - u^2/c^2} = v/c$. Отсюда очевидно, что скорость в центрально-симметричной системе отсчета никогда не превосходит скорость света. Пусть $F(R) = r_g = \text{const}$, тогда

$$\exp \lambda = \frac{1}{1 - r_g/r}; \quad \exp \nu = 1 - \frac{r_g}{r}; \quad ct_R \sqrt{1 + f} = c\tau_R; \quad (8.28)$$

$$ct_r = \frac{1}{1 - r_g/r} \sqrt{\frac{1 + f}{f + r_g/r}}.$$

Интегрируя (8.28), находим

$$c[t - t_0(R)] = \sqrt{1 + f} \left[c\tau + 2r_g \int \frac{dz}{z^2 - (1 + f)} - 2r_g \int \frac{dz}{z^2 - f} \right],$$

где $z = \sqrt{f + r_g/r}$, что дает

$$c(t - t_0) = \begin{cases} \sqrt{1 + f} \left[c\tau - \frac{4r_g}{\sqrt{1 + f}} \text{Arth} 2 \sqrt{\frac{f + r_g/r}{1 + f}} + \right. \\ \left. + \frac{4r_g}{\sqrt{-f}} \text{Arth} 2 \sqrt{\frac{f + r_g/r}{-f}}, \quad f < 0; \right. \\ \left[c\tau - 4r_g \text{Arth} 2 \sqrt{\frac{r_g}{r}} + 2 \sqrt{r_g r} \right], \quad f = 0; \\ \left. \sqrt{1 + f} \left[c\tau - \frac{4r_g}{\sqrt{1 + f}} \text{Arth} 2 \sqrt{\frac{f + r_g/r}{1 + f}} - \frac{4r_g}{\sqrt{f}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \text{Arth} 2 \sqrt{\frac{f + r_g/r}{f}} \right], \quad f > 0. \right\}$$

Связь (8.28) между t_R и τ_R можно легко проверить. В самом деле:

$$c\tau_R = -\frac{1}{2} \int \frac{f' dr}{(f + r_g/r)^{3/2}} + c\tau'_0; \quad ct_R = -\frac{1}{2} \int \frac{f' dr}{\sqrt{1+f} (f + r_g/r)^{3/2}} + ct'_0,$$

откуда

$$ct_R \sqrt{1+f} - \sqrt{1+f} ct'_0 = c\tau_R - c\tau'_0.$$

И поскольку $ct_R \sqrt{1+f} = c\tau_R$, получаем $\tau'_0 = \sqrt{1+f} t'_0$. Эти соотношения полностью определяют метрические коэффициенты при переходе к новым переменным. В пределе при $r_g = 0$ ($r \rightarrow \infty$)

$$c\tau = \frac{r}{\sqrt{f}} + c\tau_0; \quad ct = \sqrt{(1+f)/f} r + ct_0, \quad (8.29)$$

причем $\tau'_0 = \sqrt{1+f} t'_0$. В то же время

$$r = \sqrt{f} c\tau + R^*(R). \quad (8.30)$$

Сравнивая первое соотношение (8.29) и (8.30), имеем:

$$r = \sqrt{f} (c\tau - c\tau_0) = \sqrt{f} c\tau + R^*,$$

откуда

$$-R^* = \sqrt{f} c\tau_0; \quad r' = f'r/2f - \sqrt{f} c\tau'_0 = (f'/2f) (r - R^*) + R^{*'}.$$

Запишем метрику (8.23) в виде

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + [r'^2/(1+f)] dR^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8.31)$$

Из (8.29) и (8.30) следует

$$\begin{aligned} cd\tau &= \frac{dr}{\sqrt{f}} + dR \left(c\tau'_0 - \frac{r}{2\sqrt{f}} \frac{f'}{f} \right) = \frac{dr}{\sqrt{f}} - \frac{r' dR}{\sqrt{f}}; \\ c dt &= dr \sqrt{\frac{1+f}{f}} + dR \left(c\tau_0^2 - \frac{r}{2\sqrt{f}} \frac{f'}{f} \right) \frac{1}{\sqrt{1+f}} = \\ &= dr \sqrt{\frac{1+f}{f}} - \frac{dR r'}{\sqrt{f}(f+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} dR &= (\sqrt{1+f}/f') (dr \sqrt{1+f} - \sqrt{f} cdt); \\ cd\tau &= -\sqrt{f} dr + \sqrt{1+f} cdt. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в метрику (8.31) и в результате получим

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8.32)$$

Теперь удобно определить $R^*(R)$ следующим образом: $R^* = \int \sqrt{1+f} dR$. Находим далее

$$c\tau_0 = -\frac{R^*}{R} = -\frac{1}{\sqrt{f}} \int \sqrt{1+f} dR; \quad ct_0 = \int \frac{c\tau_0^2 dR}{\sqrt{1+f}}.$$

Исключим из (8.29) r , тогда

$$ct = \sqrt{1+f} c\tau - \sqrt{1+f} c\tau_0 + ct_0.$$

Подставив сюда выражения для τ_0 и t_0 , получим:

$$\left. \begin{aligned} ct &= \sqrt{1+f} \, c\tau + \int \left(\frac{f'}{2f \sqrt{1+f}} \int \sqrt{1+f} \, dR \right) dR + \\ &+ \sqrt{\frac{1+f}{f}} \int \sqrt{1+f} \, dR - \int \frac{dR}{\sqrt{f}}; \\ r &= \sqrt{f} \, c\tau + \int \sqrt{1+f} \, dR. \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

Эти выражения являются обобщенными преобразованиями Лоренца для $f = f(R) \neq \text{const.}$ (Заметим, что для $f < 0$ мы также выбрали $R^* = \int \sqrt{1+f} \, dR$.) При этом метрика в синхронно-сопутствующей системе отсчета имеет вид:

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \left[\frac{f' c\tau}{2 \sqrt{f(1+f)}} + 1 \right]^2 dR^2 + \left(\sqrt{f'} c\tau + \int \sqrt{1+f} \, dR \right)^2 d\Omega^2. \quad (8.34)$$

Компоненты 4-тензора кривизны в данном случае $R_{iklm} = 0$, в чем легко убедиться простыми вычислениями, исходя из того, что при преобразовании (8.33) метрика (8.34) переходит в (8.32).

При $f = \text{const}$ соотношение (8.33) переходит в следующее:

$$\left. \begin{aligned} ct &= \sqrt{1+f} \, c\tau + \sqrt{f} \, R = \frac{c\tau + (u/c) R}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ r &= \sqrt{f} \, c\tau + \sqrt{1+f} \, R = \frac{R + (u/c) c\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

т. е. в обычное преобразование Лоренца. Из соотношения (8.35) становится очевидным, что при $f = 0$ ($u = v = 0$) $r = R$, $t = \tau$. Если $f < 0$, то при $r_g = 0$, $f = 0$ $r = R$, $t = \tau$. Отсюда следует, что при $f \leq 0$ в предельном переходе к СТО центрально-симметричная и сопутствующая системы отсчета совпадают: при $f = \text{const}$ в случае $r_g = 0$ для пробной частицы с заданным $f > 0$ ($v > 0$, $u > 0$) движение синхронно-сопутствующей системы (координаты τ , R) происходит с постоянной скоростью относительно центрально-симметричной системы (координаты t , r). Если $f = f(R) > 0$, то метрика (8.34) и преобразования (8.33) являются метрикой для системы частиц с любым заданным распределением скоростей и обобщенными преобразованиями Лоренца.

Метрические коэффициенты

$$\exp \mu = \left(\frac{f' c\tau}{2 \sqrt{f(f+1)}} + 1 \right)^2; \quad r = v_0 \tau + \int \sqrt{1+f} \, dR$$

определяются именно заданием начальных скоростей: $\sqrt{f_0} = v_1(R)/c$.

Легко решается и обратная задача. Зная

$$r_{c\tau} = \sqrt{f + F/r}, \quad \exp \omega = r'^2 / (1 + f),$$

находим

$$\begin{aligned} \exp \lambda &= \frac{1}{1 - F/r}; \quad \exp \nu = \frac{1 + f}{c^2 \dot{t}^2 (1 - F/r)} = \frac{1 + f}{(1 - F/r) c^2 t_r^2 (f + F/r)} = \\ &= \frac{\tau_R^2}{t_r^2} \frac{1 - F/r}{1 + f}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\dot{ct} = \sqrt{1+f} \exp[(\lambda - \nu)/2]$ или $ct_r = \sqrt{1+f} \times \exp[(\lambda - \nu)/2] c\tau_r$, причем

$$ct_r \sqrt{f + F/r} (1 - F/r)/(1 + f) = ct_R/c\tau_R;$$

$$u/c = r_{ct} \exp[(\lambda - \nu)/2] = r_{ct}/\sqrt{1+f} = \sqrt{(f + F/r)(1+f)},$$

что определит

$$ct = ct(r, R); \exp \nu = \frac{(1 - F/r) c^2 \tau_R^2}{(1 + f) c^2 t_R^2};$$

$$\dot{ct} = \frac{ct_R}{c\tau_R} \frac{(1+f)}{(f + F/r)}.$$

При $F = r_g$

$$\exp \lambda = 1/(1 - r_g/r); \exp \nu = 1 - r_g/r; c\tau_R = \sqrt{1+f} ct_R; ct = \sqrt{(1+f)(1 + r_g/r)}.$$

Решим задачу Шварцшильда в метрике Толмена, используя следующие важные принципы.

1. Уравнения Эйнштейна имеют предельные переходы к СТО и к законам Ньютона, а затем к механике Галилея, причем последовательность этих переходов безразлична, поэтому и в метрике Толмена это (принцип соответствия) должно выполняться.

2. Якобиан преобразования $\Delta_0 = \partial(r, ct)/\partial(R, c\tau) \neq 0$ не стремится к бесконечности во всей рассматриваемой области (за исключением особых точек) и при предельных переходах к СТО, теории Ньютона и механике Галилея.

3. Если данная область покрывается в одной системе отсчета «картами», то и в другой системе число карт сохраняется. При этом используются только допустимые системы координат, что сохраняет класс функции при переходе от одной системы к другой. Обычно считают, что преобразования координат x^i относятся к классу C^2 , а преобразования g_{ik} к классу функций C^1 .

Поскольку $c\tau_r = \frac{1}{\sqrt{f + r_g/r}}$, где $1 + f > 0$, имеем

$$f(c\tau - c\tau_0) = \sqrt{fr^2 + r_g r} - \frac{r_g}{\sqrt{-f}} \arcsin \sqrt{\frac{-rf}{r_g}}, \quad f < 0;$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{r_g} (c\tau - c\tau_0) = r^{3/2}, \quad f = 0;$$

$$f(c\tau - c\tau_0) = \sqrt{fr^2 + r_g r} - \frac{r_g}{\sqrt{f}} \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{rf}{r_g}}, \quad f > 0.$$

Рассмотрим эти три режима движения отдельно.

1. При $f < 0$ имеем «эллиптическое» движение. При $c\tau = 0$ необходимо и достаточно положить $r = R$ (координаты Эйлера и Лагранжа совпадают), $dr/cd\tau = v/c = \sqrt{f + r_g/r} = 0$, что позволяет найти все возможные движения. Из этих условий имеем: $f = -r_g/R$, $c\tau_0 = -(R^{3/2}/r_g^{1/2}) \pi/2$, $v = \sqrt{2GM(1/r - 1/R)}$, а также

$$\sqrt{r_g} c\tau = \sqrt{2GM} \tau = R^{3/2} \left[\arcsin \sqrt{\frac{r}{R}} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{r}{R} \left(1 - \frac{r}{R}\right)} \right].$$

Заметим, что R определяется с точностью до постоянной, поэтому можно, например, положить при $c\tau = 0$ $r = R + r_g$. Тогда

$$f = -\frac{r_g}{R+r_g}; \quad c\tau_0 = -\frac{(R+r_g)^{3/2}}{r_g^{1/2}} \frac{\pi}{2}; \quad v = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R+r_g} \right)};$$

$$\sqrt{r_g} c\tau = \sqrt{2GM} \tau = (R+r_g)^{3/2} \left[\arcsin \sqrt{\frac{r}{R+r_g}} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{r}{R+r_g} \left(1 - \frac{r}{R+r_g} \right)} \right].$$

Поскольку $\Delta_0 = \exp \{[\omega - (\lambda + \nu)]/2\}$, а в рассматриваемом случае $\lambda + \nu = 0$, имеем

$$\Delta_0 = \exp \frac{\omega}{2} = \frac{r'}{\sqrt{1+f}} = -c\tau_R \sqrt{\frac{f+r_g/r}{1+f}},$$

где

$$c\tau_R = c\tau_{0R} + \frac{f'}{f} \left[-\frac{3}{2} (c\tau - c\tau_0) + \frac{r}{\sqrt{f+r_g/r}} \right].$$

Так как

$$f = -\frac{r_g}{R+r_g}; \quad c\tau_0 = -\frac{(R+r_g)^{3/2}}{r_g^{1/2}} \frac{\pi}{2},$$

то

$$\left. \begin{aligned} \frac{f'}{f} &= -\frac{1}{R+r_g}; \quad c\tau_{0R} = -\frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{R+r_g}{r_g}}; \\ \Delta_0 &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{R+r_g-r}{rR}} \left[\sqrt{R+r_g} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{r}{R+r_g}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{r \left(1 - \frac{r}{R+r_g} \right)} \right] + \frac{r}{\sqrt{R(R+r_g)}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

Легко проверить, что соотношение (8.36), определяющее Δ_0 , удовлетворяет всем сформулированным выше требованиям. Таким образом, указанное нами решение вполне корректно. Якобиан Δ_0 всюду конечен, за исключением центра $R = 0$, который является естественной особой точкой. При $r_g = 0$ ($G = 0$ или $c \rightarrow \infty$) $R = r$, $\Delta_0 = 1$.

2. При $f = 0$ положим, что при $c\tau = 0$ $r = R + r_g$ (или $r = R$), тогда

$$r^{3/2} = (R+r_g)^{3/2} \pm \frac{3}{2} \sqrt{r_g} c\tau; \quad c\tau_0 = \frac{2}{3} \frac{(R+r_g)^{3/2}}{r_g^{1/2}}; \quad v^2 =$$

$$= \frac{2GM}{r}; \quad r' = \sqrt{\frac{R+r_g}{r}} = \Delta_0.$$

Решение отвечает всем сформулированным выше требованиям. Ранее Леметр и Ю. А. Рылов положили $c\tau_0 = -R$, при этом $r^{3/2} = (3/2) \sqrt{r_g} (R \pm c\tau)$. Но тогда, полагая $c \rightarrow \infty$ или $G = 0$, получаем $r' = \sqrt{r_g/r} = \Delta_0$.

Мы видим, что и в этом случае не выполняется принцип соответствия; следовательно, выбор $c\tau_0$ не удовлетворителен.

3. При $f > 0$, положив $ct = 0$, $r = R + r_g$ (или $r = R$), задаем при $r \rightarrow \infty$ $v/c = \sqrt{f} = v_0(R)/c$, что определяет $f = v_0^2/c^2$. Далее из (8.27) при $ct = 0$ найдем ct_0 , чем полностью решаем поставленную задачу:

$$v_0 \tau = \sqrt{r(rv_0/c + r_g)} - \sqrt{(R + r_g)[(R + r_g)v_0/c + r_g]} - \\ - \frac{r_g c}{v_0} \operatorname{Arsh} \sqrt{v_0 r / cr_g} + (cr_g / v_0) \operatorname{Arsh} \sqrt{(v_0 / cr_g)(R + r_g)}.$$

Вычислим 3-скорость в центрально-симметричной системе отсчета. Известно, что

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{f + r_g/r}{1 + f},$$

$$\text{при } f < 0 \quad u^2 = \frac{2GM}{r} \left[\frac{R + r_g - r}{R} \right] c^2; \quad \text{при } f = 0 \quad u^2 = \frac{2GM}{r} c^2; \quad \text{при } f > 0 \quad u^2 = \\ = \frac{2GM}{r} c^2 + v_0^2 / \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2} \right). \quad \text{При } r = r_g \quad u = c,$$

это свидетельствует о том, что сфера Шварцшильда имеет реальную особенность. При этом энергия любой пробной частицы для метрики (8.23) $E = \sqrt{-g_{00}} \times \times E_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2} = E_0 \sqrt{1 + f} / \sqrt{1 - r_g/r}$ стремится к бесконечности ($\sqrt{-g_{00}} = 1$). Если в метрике Шварцшильда была координатная особенность, а энергия в постоянном поле сохранялась, то в метрике Толмена после устранения координатной особенности возникают трудности с интерпретацией энергии на шварцшильдовском радиусе. Действительно, поскольку

$$\bar{R}^2 = R_{iklm} R^{iklm} = 12r_g^2/r^6 \approx \kappa^2 \varepsilon_g^2,$$

где ε_g — плотность энергии гравитационного поля, имеем

$$\varepsilon_g = \sqrt{12} r_g / \kappa r^3 = \sqrt{3} M c^2 / 2\pi r^3.$$

При $r = r_g$

$$\varepsilon_g = \sqrt{12} / \kappa r_g^2 = \sqrt{3} c^8 / 16\pi G^3 M^2,$$

и если $M = m_L = \sqrt{c\hbar/2G} = 10^{-5}$ г, то $\varepsilon_g \approx c^7/G^2\hbar \approx 10^{115}$ эрг/см³, что соответствует плотности энергии планкеона. При $M \sim 10^{35}$ г (предполагаемая масса черной дыры) $\varepsilon_g \approx 35$ эрг/см³, что соответствует плотности энергии нуклона. Для масс, меньших 10^{35} , ε_g больше этой плотности энергии. Но при таких значениях плотности энергии уже нельзя пользоваться классической теорией, нужна квантовая теория.

Можно сделать вывод, что рассмотрение особенностей на сфере Шварцшильда бесполезно проводить в рамках классических теорий. ОТО может быть справедлива для внешнего поля лишь при $r > r_g$.

Метрику (8.24) с помощью преобразования координат можно привести еще к одному удобному для анализа виду. Пусть $ct = c \tau(r, R)$, тогда $cd\tau = c\tau_r dr + c\tau_R dR$. При этом из (8.24) имеем

$$-ds^2 = -2c\tau_r c\tau_R dr dR + (\exp \omega - c^2 \tau_R^2) dR^2 - c^2 \tau_r^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Отсюда, например, для случая $f = 0$, $r^{3/2} = R^{3/2} + (3/2) \sqrt{r_g} ct$ найдем, что

$$c\tau_r = \sqrt{r/r_g}; \quad c\tau_R = -\sqrt{R/r_g}; \quad \exp \omega = R/r.$$

Таким образом, метрику (8.28) можно привести к виду

$$-ds^2 = 2(\sqrt{rR/r_g}) dr dR + (R/r_g)(r_g/r - 1) dR^2 - (r/r_g) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Введя новые координаты $dr_1 = \sqrt{r/r_g} dr$, $dR_1 = \sqrt{R/r_g} dR$, из (8.29) получим

$$-ds^2 = [\sqrt[3]{(2r_g/3r_1)^2} - 1] dR_1^2 + 2dr_1 dR_1 - dr_1^2 + r_g^2 d\Omega^2 / \sqrt[3]{(2r_g/3r_1)^4},$$

откуда, обозначая $(2r_g/3r_1)^2 = r_g^3/r^3$, $dR_1 = dR$, рассматриваемую метрику в координатах r, R, θ, φ окончательно запишем в виде

$$-ds^2 = -(1 - r_g/r) dR^2 + 2\sqrt{r/r_g} dr dR - (r/r_g) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Особенность при $r = r_g$ в этой метрике сохраняется в коэффициенте при dR^2 .

Посмотрим, какие результаты получаются для закрытой изотропной модели Фридмана. Поскольку $r = a \sin \chi$, $R = 2a_0 \chi$, легко вычислить

$$c\tau_r = 1/\dot{a} \sin \chi; c\tau_R = -r \cos \chi / 2\dot{a}a_0 \sin^2 \chi.$$

Зная $r_\chi = a \cos \chi$, имеем $r' = r_R = (a/2a_0) \cos \chi$. При этом $\exp \omega = r'^2 / (1 + f)$, и учитывая, что $f = -\sin^2 \chi$, найдем $\exp \omega = a^2 / 4a_0^2$. Подставляя значения $c\tau_r$, $c\tau_R$, $\exp \omega$ в (8.28), получаем

$$-ds^2 = \frac{r \cos \chi}{\dot{a}^2 a_0 \sin^2 \chi} dr dR + \frac{a^2}{4a_0^2} \left(1 - \frac{\cos^2 \chi}{\dot{a}^2 \sin^2 \chi} \right) - \frac{dr^2}{\dot{a}^2 \sin^2 \chi} + r^2 d\Omega^2,$$

или

$$-ds^2 = \frac{a \cos \chi}{\dot{a}^2 a_0 \sin \chi} dr dR + \frac{a^2}{4a_0^2} \left(1 - \frac{\text{ctg}^2 \chi}{\dot{a}^2} \right) - \frac{dr^2}{\dot{a}^2 \sin^2 \chi} + r^2 d\Omega^2.$$

Эти соотношения удобны, например, при записи уравнений $T_{i;k}^k = 0$, когда можно получить сразу два квазилинейных уравнения для определения ε и u .

8.3. РЕШЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА—ФРИДМАНА [167]

Обычно решения Эйнштейна — Фридмана находят введением фиктивной четвертой координаты. Здесь решение Эйнштейна — это статическое решение основных уравнений для центрально-симметричного поля, когда $f_i = 0$, $u = 0$, $p = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$. Уравнения движения при этом выполняются тождественно, а уравнения поля принимают вид (система отсчета тождественна сопутствующей):

$$\sigma = 0; r = R; r' = 1; \omega = \lambda, \\ \kappa p = \frac{\exp(-\lambda) - 1}{r^2}; \kappa \varepsilon = \frac{1 - \{\exp(-\lambda) + r [\exp(-\lambda)]'\}}{r^2}.$$

Отсюда следует, что $\exp(-\lambda) = 1 - r^2/a^2$, где $a = \text{const}$ — постоянная интегрирования, квадрат которой в принципе может быть больше и меньше нуля. При этом $\kappa p = -1/a^2$, $\kappa \varepsilon = 3/a^2$, откуда $\varepsilon + 3p = 0$ — уравнение состояния Эйнштейна. Метрика (Эйнштейна) имеет вид:

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Пусть $cdt = c d\tau + A(r) dr$, тогда

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 - 2Ac d\tau dr + \left(\frac{1}{1 - r^2/a^2} - A^2 \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Положим, что $1/(1 - a/r) - A^2 = 1$, тогда

$$A = \pm (r/a) / \sqrt{1 - r^2/a^2};$$

$$ct = c\tau \pm a \int \frac{r dr}{a^2 \sqrt{1 - r^2/a^2}} = c\tau \mp \left[\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} - 1 \right], \quad a \rightarrow \infty, \quad s = \tau,$$

и мы пришли к метрике с евклидовой чисто пространственной частью. Рассмотрим теперь эту задачу в лабораторной центрально-симметричной системе отсчета.

Основные уравнения при $u = 0$ примут вид (причем мы обобщим задачу и будем считать, что все искомые функции зависят от r):

$$p'/(p + \varepsilon) + v'/2 = 0; \quad 1 - \kappa \varepsilon r^2 = [r \exp(-\lambda)]'; \quad 1 + \kappa p r^2 = \exp(-\lambda) \times \\ \times (v' r + 1).$$

Из последнего уравнения имеем $r v' = (1 + \kappa p r^2) \exp \lambda - 1$. Подставив это в первое уравнение системы, найдем, что

$$p' + \frac{(p + \varepsilon)}{2r} [(1 + \kappa p r^2) \exp \lambda - 1] = 0.$$

Подставив $\exp(-\lambda) = (1 + \kappa p r^2) / [1 - 2r p' / (p + \varepsilon)]$ во второе уравнение системы, получим

$$\frac{d[r \exp(-\lambda)]}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{r(1 + \kappa p r^2)}{1 - 2r p' / (p + \varepsilon)} \right] = 1 - \kappa \varepsilon r^2.$$

Мы пришли к так называемому уравнению Оппенгеймера — Волкова. Если $p = p_0 = \text{const}$ и $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$, то

$$(3p_0 + \varepsilon_0)(\varepsilon_0 + p_0) = (2/\kappa r) p' (\kappa \varepsilon_0 r^2 - 3).$$

Для определения v из первого уравнения найдем

$$v' = \frac{\kappa r (p + \varepsilon/3)}{1 - \kappa \varepsilon r^2/3},$$

откуда

$$\exp v = (1 - \kappa \varepsilon r^2/3)^{-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{p}{2} \right)}.$$

Воспользуемся вторым уравнением системы

$$4\kappa p \exp \lambda = 2v'' + v'^2 + 2v'/r - \lambda' (v' + 2/r) = 4\kappa p \exp \lambda + \\ + \exp(2\lambda) \kappa (p + \varepsilon/3) \kappa r^2 (p + \varepsilon),$$

из которого следует

$$(p + \varepsilon/3)(p + \varepsilon) = 0.$$

При $p + \varepsilon/3 = 0$ имеем $v = 0$; при $p + \varepsilon = 0$:

$$\exp v = 1 - \kappa \varepsilon r^2/3 = \exp(-\lambda), \quad v + \lambda = 0.$$

Это решение рассмотрено отдельно, поскольку в уравнении движения $p'/(p + \varepsilon) = v'/2$ при $p + \varepsilon = 0$ имеется особенность.

Решим снова, теперь на основе полевых уравнений, задачу о равновесии в системе отсчета с метрикой

$$-ds^2 = -\exp \sigma c^2 d\tau^2 + \exp \omega dr^2 + r^2 (c\tau, r_0) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

полагая, что $\sigma = \sigma(r)$, $\omega = \omega(r)$, $r_0 = r$. Тогда $r' = 1$, $r'' = 0$, и система полевых уравнений примет вид:

$$\kappa p = \exp(-\lambda) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} \exp(-\lambda) \left(2v'' + \right. \\ \left. + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r} + \frac{2v'}{r} - \lambda' v' \right); \\ \kappa \varepsilon = 1/r^2 - \exp(-\lambda) (1/r^2 - \lambda'/r).$$

Пусть $p, \varepsilon = \text{const}$, тогда, интегрируя последнее уравнение, получаем, что $\exp(-\lambda) = 1 - \kappa \varepsilon r^2/3$, откуда

$$\lambda' = (2/3) \kappa \varepsilon r / (1 - \kappa \varepsilon r^2/3).$$

Из этого следует или $\varepsilon_0 + 3 p_0 = 0$, тогда $v = 0$, $\exp(-\lambda) = 1 - r^2/a^2$, $\kappa p = -1/a^2$, или $\exp v = \exp(-\lambda) = 1 - r^2/a^2$, тогда $p_0 + \varepsilon_0 = 0$, $\kappa p = -3/a^2$.

Первый случай соответствует метрике Эйнштейна, второй — так называемой метрике де Ситтера. Ко второму случаю мы еще вернемся, а теперь рассмотрим движение материи, когда в сопутствующей системе отсчета распределение материи в пространстве однородно, т. е. $p = p(\tau)$, $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$.

Для этой цели выпишем снова все основные уравнения и найдем связь между сопутствующей и центрально-симметричной системами отсчета.

Основные уравнения гравитационного поля для сферически-симметричной метрики

$$-ds^2 = -\exp \sigma c^2 d\tau^2 + \exp \omega dr_0^2 + \exp \mu (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

имеют, как известно, вид (7.31). Если положить, что $\exp \mu = r^2$, где $r = r(\sigma, r_0)$, то уравнения (7.31) несколько упростятся:

$$\left. \begin{aligned} \kappa T_1^1 &= \exp(-\omega) \left(\frac{r'^2}{r^2} + \frac{r'}{r} \sigma' \right) - \exp(-\sigma) \left(\frac{2\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\dot{r}}{r} \dot{\sigma} \right) - \frac{1}{r^2}; \\ \kappa T_2^2 &= \kappa T_3^3 = \frac{1}{4} \exp(-\omega) \left(2\sigma'' + \sigma'^2 + 4 \frac{r''}{r} - 2 \frac{r'}{r} \omega' + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{r'}{r} \sigma' - \sigma' \omega' \right) + \frac{1}{4} \exp(-\sigma) \left(\dot{\omega} \dot{\sigma} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\sigma} - 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\omega} - \right. \\ &\quad \left. - 2\ddot{\omega} - \dot{\omega}^2 - 4 \frac{\ddot{r}}{r} \right); \\ \kappa T_0^0 &= \exp(-\omega) \left[\frac{2r''}{r} + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{r'}{r} \omega' \right] - \exp(-\sigma) \times \\ &\quad \times \left[\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{\omega} \right] - \frac{1}{r^2}; \\ \kappa T_0^1 &= \exp(-\omega) \left(\frac{r'}{r} \dot{\omega} + \frac{\dot{r}}{r} \sigma' - 2 \frac{\dot{r}'}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

Уравнение сохранения тензора энергии-импульса материи

$$T_{i,k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} T_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} T^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}$$

дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{A\dot{c}u + uu'}{1 - u^2/c^2} + c^2 (\ln W)' + Ac (\ln W) \cdot u + \frac{1}{2} (Ac\dot{\omega}u + c^2 \sigma') &= \\ &= \frac{c^2 T^0}{W} \Sigma' \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right); \\ \frac{Ac\dot{\varepsilon} + u\varepsilon'}{p + \varepsilon} + \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left[u' + \frac{A\dot{c}u}{c^2} \right] + \\ + Ac \left(\dot{\mu} + \frac{1}{2} \dot{\omega} \right) + u \left(\mu' + \frac{1}{2} \sigma' \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

где $A = \exp [(\omega - \sigma)/2]$, причем

$$u/c = \exp [(\omega - \sigma)/2] (\partial r/c\partial t)_{r_0} = A (\partial r/c\partial t)_{r_0}; \quad (8.39)$$

Σ — энтропия; T^0 — температура; r_0 — лагранжева координата. Уравнения сохранения энергии (адиабатичности) имеют вид:

$$d\Sigma/ds = 0, \text{ или } A c \dot{\Sigma} + u \Sigma' = 0. \quad (8.40)$$

При выводе уравнений (8.39) использовано соотношение

$$dW = vdp + T^0 d\Sigma = d[(p + \varepsilon) v],$$

где $W = (p + \varepsilon) v$ — теплосодержание, что дает

$$\frac{1}{(p + \varepsilon)} \frac{d\varepsilon}{ds} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{ds} + \frac{T^0}{W} \frac{d\Sigma}{ds} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{ds}. \quad (8.41)$$

К этим соотношениям при решении задачи для произвольного уравнения состояния надо добавить условие

$$\partial(p, v)/\partial(T^0, \Sigma) = 1.$$

Система уравнений (8.37) и (8.40) является полной. Уравнение (8.38) ничего нового не дает, однако в конкретных случаях выгодно брать два уравнения системы (8.37), уравнения (8.38) и (8.40).

Для центрально-симметричной системы отсчета надо положить $\exp \mu = r^2$, $r_0 = r$, $\tau = t$, причем независимыми переменными будут ct , r ; для сопутствующей положим также $\exp \mu = r^2$, $u = 0$, независимыми переменными будут ct , r_0 . В сопутствующей системе отсчета уравнения (8.38) принимают весьма простой вид:

$$\frac{W'}{W} - \frac{T^0 \Sigma'}{W} = \frac{W'}{W} - \frac{\Sigma'}{c_p} = \frac{p'}{p + \varepsilon} = -\frac{\sigma'}{2},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} W &= \xi_1(ct) \exp(\Sigma'/c_p - \sigma/2); \\ \frac{\dot{\varepsilon}}{p + \varepsilon} &= \frac{T^0 \Sigma'}{W} - \frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{\Sigma}}{c_p} - \frac{\dot{v}}{v} = -\left(\dot{\mu} + \frac{\dot{\omega}}{2}\right); \\ \dot{v}/v &= \dot{\Sigma}/c_p + \dot{\mu} + \dot{\omega}/2, \end{aligned} \right\} \quad (8.42)$$

и

$$v = \xi_2(r_0) \exp\left(\frac{\Sigma}{c_p} + \mu + \frac{\omega}{2}\right) = \xi_2(r_0) r^2 \exp\left(\frac{\Sigma}{c_p} + \frac{\omega}{2}\right). \quad (8.43)$$

Для (8.42) и (8.43) получим

$$r^2 W/v = r^2 (p + \varepsilon) = (\xi_1/\xi_2) \exp -[(\sigma + \omega)/2].$$

Поскольку $dW = c_p dT^0$, уравнение (8.41) примет вид $c_p dT^0/T^0 - vdp/T^0 = d\Sigma$, что для идеального газа с уравнением состояния $pv = RT^0$ после интегрирования дает уравнение семейства адиабат:

$$pv^k = \exp [(\Sigma - \Sigma_0)/c_v].$$

Рассмотрим случай, когда в сопутствующей системе материя распределяется в пространстве однородно. Тогда, так как $p = p(\tau)$, из уравнений (8.38) имеем: $p' = 0$, $\sigma = 0$. Система (8.37) теперь примет вид:

$$\begin{aligned} \kappa p &= \frac{f}{r^2} - \left(2 \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2}\right) = \frac{f'}{2rr'} - \left(\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\ddot{r}'}{r'} + \frac{\dot{r}'}{r'} \frac{\dot{r}}{r}\right); \\ \kappa \varepsilon &= \left(2 \frac{\dot{r}'}{r'} \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{r^2}\right) - \left(\frac{f}{r^2} + \frac{f'}{rr'}\right); \end{aligned}$$

$$\exp \omega = r'^2/(1 + f),$$

где $\dot{f} = \dot{f}(r_0)$. Отсюда следует

$$2(\varepsilon + 3p) = -2(\ddot{r}'/r' + 2\ddot{r}/r) = \Phi(c\tau),$$

что позволяет найти $r = a(c\tau) A(r_0)$. Произведя простые выкладки, в последней системе уравнений найдем:

$$\kappa p = \frac{\dot{f}}{r^2} - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = \frac{f'}{2r'r} - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right);$$

$$\kappa \varepsilon = 3\dot{a}^2/a^2 - (f/r^2 + f'/r'r).$$

Далее определяем $f = -\beta_1 A^2(r_0)$, где $\beta_1 = 1, 0, -1$:

$$\left. \begin{aligned} \kappa p &= -(1/a^2)(\beta_1 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}); & R_0^0 &= 3a\ddot{a}/a^2; \\ \kappa \varepsilon &= (3/a^2)(\beta_1 + \dot{a}^2); & R_1^1 &= (1/a^2)[2(\beta_1 + \dot{a}^2) + a\ddot{a}]; \\ R &= \kappa(\varepsilon - 3p) = \frac{6}{a^2}(\beta_1 + \dot{a}^2 + a\ddot{a}) \exp \omega = \frac{a^2 A'^2}{1 - \beta_1 A^2} = \\ &= \frac{a^2}{4a_0^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

что для $\beta_1 = 1, 0, -1$ при $r_0 = 2a_0\chi$ дает соответственно $A = \sin \chi, \chi, \operatorname{sh} \chi$. [Если $A'^2/(1 - \beta_1 A^2) = B^2(r_0)$, то, делая замену $Bdr_0 = dr_0^*$, можно снова перейти к метрике с $\exp \omega = a^2/4a_0^2$.] Уравнение $2\dot{\varepsilon}/(p + \varepsilon) = -(2\dot{\mu} + \dot{\omega})$ примет вид $\dot{\varepsilon}/(p + \varepsilon) = -3\dot{a}/a$, что согласуется с уравнением (8.44). Поскольку $2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + \kappa pr^2 - f = 0$, интегрируя, найдем, что $\dot{r} = f + F/r$, где $F = -\int \kappa pr^2 dr + \psi(r_0) = -A^3 \int \kappa p(a) a^2 da + \psi(r_0)$. Далее, подставляя значение F в другие уравнения, найдем

$$\kappa \varepsilon = \frac{F'}{r^2 r'} = -\frac{3}{a^2} \int \kappa p a^2 da + \frac{\psi'}{r^2 r'},$$

где $\psi = \text{const} \cdot A^3$. Тогда

$$\kappa \varepsilon = -\frac{3}{a^2} \int \kappa p a^2 da + \frac{\text{const}}{a^3},$$

причем если $p = 0$, то $\text{const} \neq 0$; при $p \neq 0$ $\text{const} = 0$, иначе это соотношение не будет совпадать с соотношением

$$\dot{\varepsilon}/(p + \varepsilon) = -3\dot{a}/a.$$

В результате проделанных вычислений получим метрику

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + (a^2/4a_0^2) dr_0^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Положив $r_0 = 2a_0\chi$, запишем метрику в обычном виде [$a = a(\tau)$]

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + a^2 d\chi^2 + r^2 d\Omega^2,$$

или

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + dl^2, \quad (8.45)$$

где $dl^2 = a^2 d\chi^2 + r^2 d\Omega^2 = a^2 [d\chi^2 + A^2 d\Omega^2]$.

Обычно к частному случаю этой метрики приходят, используя метод вложения «кривого» 3-пространства в евклидово 4-пространство, а именно полагая, что

$$r = a \sin \chi, \text{ где } r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \chi; \quad x_4^2 = a^2 \cos^2 \chi;$$

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 +$$

$$+ dx_4^2 = a^2 d\chi^2 + r^2 d\Omega^2 = (1 - r^2/a^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

при $a = \text{const}$. Далее полагают, что $a = a(\tau)$, и проверяют, удовлетворяет ли метрика (8.45) уравнениям поля. Метрика (8.45) получена непосредственным решением уравнений поля (8.37).

Перейдем от метрики

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + [r'^2/(1+f)] dr_0^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8.46)$$

где $r'^2/(1+f) = \exp \omega$, к метрике

$$-ds^2 = -c^2 \exp \nu dt^2 + \exp \lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (8.47)$$

(здесь $\sigma = \nu$; $\omega = \lambda$, $\exp \mu = r^2$). Заметим, что прямые вычисления ν и λ очень громоздки и не могут быть проведены в общем виде как функции от r , $c\tau$. Поскольку $r = aA$, то $f = -\beta_1 A^2$; $\exp \omega = r'^2/(1+f) = a^2/4a_0^2$; $r_0 = 2a_0\chi$; $[r'^2/(1+f)] dr_0^2 = \exp \omega dr_0^2 = a^2 d\chi^2$, и поскольку в метрике (8.46) $r = r(c\tau, r_0)$, будем искать в метрике (8.47) $ct = ct(c\tau, r_0)$. Отсюда имеем

$$dr = \dot{r} d\tau + r' dr_0; \quad cdt = \dot{c}t d\tau + ct' dr_0.$$

Подставляя dr и cdt в (8.47), сравнивая коэффициенты при $c^2 d\tau^2$, dr_0^2 и полагая, что коэффициент при $2cd\tau dr_0$ равен нулю, находим

$$\exp \nu c^2 \dot{t}^2 - \dot{r}^2 \exp \lambda = 1; \quad r'^2 \exp \lambda - c^2 \dot{t}'^2 \exp \nu = \exp \omega = a^2/4a_0^2; \quad \exp \lambda \dot{r} r' - \exp \nu \dot{c}t ct' = 0.$$

Отсюда получаем

$$\exp \lambda = \frac{\exp \omega}{r'^2 - \dot{r}^2 \exp \omega}; \quad \exp \nu = \frac{r'^2}{c^2 \dot{t}^2 (r'^2 - \dot{r}^2 \exp \omega)}; \quad (8.48)$$

$$(\exp \omega \dot{c}t \dot{r} - ct' r') (r' \dot{c}t - ct' \dot{r}) = 0. \quad (8.49)$$

Выражение

$$r' \dot{c}t - \dot{r} ct' = \frac{\partial(r, ct)}{\partial(r_0, c\tau)} = \Delta_0 = \sqrt{\frac{-g_1}{-g_2}} = \exp \frac{\omega - (\lambda + \nu)}{2}$$

является якобианом преобразования координат в метриках (8.46) и (8.47), где

$$-g_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{11} \end{vmatrix} = \exp \omega; \quad -g_2 = \begin{vmatrix} -g_{00} & 0 \\ 0 & g_{11} \end{vmatrix} = \exp (\nu + \lambda)$$

— определители в системах $(c\tau, r_0)$ и (ct, r) соответственно. Если взять полные определители $-g = \text{diag} \{g_{ik}\}$, то результат будет прежний, так как в этих системах g_{22} и g_{33} одинаковы. Поскольку якобианы преобразований не могут обращаться в нуль, из (8.49) получим

$$\exp \omega \dot{c}t \dot{r} = ct' r', \quad (8.50)$$

что определяет $ct = ct(c\tau, r_0)$.

Теперь соотношения (8.48) можно записать в виде

$$\exp \lambda = \frac{1}{A_\chi^2 (1 - \dot{a}^2 A^2/A_\chi^2)}; \quad \exp \nu = \frac{1}{c^2 \dot{t}^2 (1 - \dot{a}^2 A^2/A_\chi^2)},$$

где $A_\chi = dA/d\chi$. В рассматриваемом случае будем иметь:

$$\exp \omega = a^2/4a_0^2; \quad r' = aA'; \quad \dot{r} = \dot{a}A.$$

Запишем (8.50) в виде

$$\dot{c}t A \dot{a} - ct_\chi A_\chi = 0, \quad ct_\chi = \partial ct / \partial \chi$$

или

$$ct_a \dot{a}^2 - (A_\chi/A) ct_\chi = 0.$$

Отсюда следует, что

$$da/\dot{a}^2 a = d\varepsilon/a = -Ad\chi/A_\chi = d\tau,$$

где $d\varepsilon = cdt/a$. Интегрируя, находим

$$\ln \Phi(ct) = \int \frac{da}{a\dot{a}^2} + \int \frac{A}{A_\chi} d\chi,$$

где $\Phi(ct)$ — произвольная функция $ct = ct(a, r_0)$. Определим скорость в центрально-симметричной системе отсчета

$$u/c = (\partial r / \partial t)_\chi \exp [(\lambda - \nu)/2].$$

После перехода к независимым переменным a, r_0 получим:

$$\frac{\partial(ct, r_0)}{\partial(a, r_0)} \frac{u}{c} = \frac{\partial(r, r_0)}{\partial(a, r_0)} \exp \frac{\lambda - \nu}{2}; \quad \exp \frac{\lambda - \nu}{2} = \frac{ct'}{A_\chi};$$

$$\frac{\dot{ct}}{\dot{a}} \frac{u}{c} = \frac{r_0 \dot{ct}}{A_\chi} = \frac{A \dot{ct}}{A_\chi},$$

откуда

$$u/c = \dot{A}/A_\chi = (\dot{a}/2a_0) A/A'.$$

Теперь можно написать, что

$$\exp \lambda = \frac{1}{A_\chi^2 (1 - u^2/c^2)}; \quad \exp \nu = \frac{1}{c^2 \dot{t}^2 (1 - u^2/c^2)}.$$

Вычислим якобиан преобразования

$$\Delta_0 = \frac{\partial(r, ct)}{\partial(r_0, c\tau)} = r' \dot{ct} - \dot{r} ct' = \dot{ct} a A' \left(1 - \frac{a^2 A^2}{4a_0^2 A'^2} \right),$$

или

$$\Delta_0 = \dot{ct} A a \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{a}{2a_0} \dot{ct} A_\chi \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right).$$

Перейдем к конкретным случаям. Прежде всего рассмотрим классические модели Фридмана. Поскольку $\dot{a}^2 = -\beta_1 + 2a_0/a$, имеем

$$\ln \Phi(ct) = \int \frac{da}{(-\beta_1 a + 2a_0)} + \int \frac{Ad\chi}{A_\chi}.$$

Для $\beta_1 = 1, 0, -1$ и $A = \sin \chi, \chi, \operatorname{sh} \chi$ имеем соответственно

$$cT(ct) = \begin{cases} 2a_0(1 - \cos \chi) + a \cos \chi = 2a_0 - (2a_0 - a) \cos \chi; \\ a/2a_0 + (1/2) \chi^2; \\ 2a_0(\operatorname{ch} \chi - 1) + a \operatorname{ch} \chi = (2a_0 + a) \operatorname{ch} \chi - 2a_0. \end{cases}$$

Произвольные функции $cT(ct)$ надо искать из условия, что при $r = 0$ $\chi = 0$, $t = \tau$. Например, для закрытой модели $\beta_1 = 1$, тогда

$$a = a_0(1 - \cos \eta); \quad c\tau = a_0(\eta - \sin \eta).$$

Отсюда следует

$$cT(ct) = cT(c\tau) = a = a_0(1 - \cos \eta),$$

что даёт

$$\left. \begin{aligned} \cos \eta &= 1 - \frac{c\tau}{a_0}; \quad \sin \eta = \sqrt{\frac{c\tau}{a_0} \left(2 - \frac{c\tau}{a_0} \right)}; \\ ct &= a_0 \left[\arcsin \sqrt{\frac{c\tau}{a_0} \left(2 - \frac{c\tau}{a_0} \right)} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{c\tau}{a_0} \left(2 - \frac{c\tau}{a_0} \right)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

Напишем соотношение $cT = 2a_0 - (2a_0 - a) \cos \chi$ (поскольку $r = a \sin \chi$) в виде

$$r = 2a_0 \sin \chi - \operatorname{tg} \chi (cT - 2a_0). \quad (8.52)$$

Подставив cT из (8.52) в (8.51), найдем $ct = ct(r, \chi)$. Определим из (8.51)

$$\frac{cdt}{cdT} = \sqrt{\frac{2a_0}{(2a_0 - a) \cos \chi} - 1},$$

что даёт

$$\frac{\dot{a}cdt}{cdT} = \frac{\dot{a}}{cT_{ct}} = \cos \chi \sqrt{\frac{2a_0}{a} \frac{(1 - \cos \chi)}{\cos \chi} + 1}.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \dot{ct} &= \cos \chi \sqrt{\frac{2a_0}{a} \frac{(1 - \cos \chi)}{\cos \chi} + 1}; \quad \frac{u}{c} = \operatorname{tg} \chi \sqrt{\frac{2a_0}{r} \sin \chi - 1}; \\ \exp \lambda &= \frac{1}{\cos^2 \chi (1 - u^2/c^2)}; \quad \exp \nu = \frac{1}{\cos^2 \chi [(2a_0/r) (\operatorname{tg} \chi - \sin \chi) + 1] (1 - u^2/c^2)}; \\ \Delta_0 &= \frac{a}{2a_0} \cos^2 \chi \sqrt{\frac{2a_0}{r} (\operatorname{tg} \chi - \sin \chi) + 1} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right); \\ ct &= a_0 [\arcsin \sqrt{(2 \cos \chi - 2 \operatorname{ctg} \chi/a_0) [2(1 - \cos \chi) + 2 \operatorname{ctg} \chi/a_0]} - \\ &\quad - \sqrt{(2 \cos \chi - 2 \operatorname{ctg} \chi/a_0) [2(1 - \cos \chi) + 2 \operatorname{ctg} \chi/a_0]}]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1 - (2a_0/r) \sin^3 \chi}{\cos^2 \chi},$$

имеем окончательно

$$\begin{aligned} \exp \lambda &= \frac{1}{1 - (2a_0/r) \sin^3 \chi}; \\ \exp \nu &= \frac{1}{[1 - (2a_0/r) \sin^3 \chi] [(2a_0/r) \operatorname{tg} \chi (1 - \cos \chi) + 1]}, \\ \Delta_0 &= \frac{a}{2a_0} \left(1 - \frac{2a_0}{r} \sin^3 \chi \right) \sqrt{\frac{2a_0}{r} \operatorname{tg} \chi (1 - \cos \chi) + 1}, \end{aligned}$$

где

$$\sqrt{(2a_0/r) \operatorname{tg} \chi (1 - \cos \chi) + 1} > 0, \quad \chi < \pi/2.$$

Отсюда следует, что при $r = 2a_0 \sin^3 \chi$, $\Delta_0 = 0$

$$cT = 2a_0 (1 - \cos^3 \chi),$$

поскольку $a = 2a_0 \sin^2 \chi$; но $\cos \chi \neq 0$, если $a < 2a_0$, тогда $\Delta_0 \neq 0$. При $a = 2a_0$, $\chi = \pi/2$ имеем $\Delta_0 = 0$. При этом в центрально-симметричной системе отсчета с течением времени из «скрытой» области выходят все новые и новые порции материи, что не позволяет описать процесс расширения в этой системе. При сжатии, напротив, материя со временем будет входить в скрытую область и не будет доступной наблюдению.

Энергия, содержащаяся внутри сферы радиуса r в центральной системе:

$$E(r) = -4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr = -\frac{8\pi a_0}{\kappa} \sin^3 \chi,$$

откуда имеем

$$2GM(r)/c^2 = 2a_0 \sin^3 \chi. \text{ При } r = 2a_0 \sin^3 \chi, \quad u/c = 1 \\ \text{имеем } 2GM/c^2 = r_g = r, \text{ а при } r < r_g \text{ и } u/c > 1$$

решение непригодно. При $r = r_g$ вещество как бы выходит (в центрально-симметричной системе отсчета) за пределы сферы радиуса r_g и становится доступным для наблюдения. При $\chi = \pi/2$ имеем $M = M_{\text{макс}}$, $\frac{2GM_{\text{макс}}}{c^2} = 2a = a_{\text{макс}}$.

Теперь можно написать, что $1 - u^2/c^2 = (1/\cos^2 \chi) (1 - r_g/r)$, где $r_g = \kappa E/4\pi$. Отсюда следует

$$\Delta_0 = \frac{a}{2a_0} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \sqrt{\frac{2a_0}{r} \operatorname{tg} \chi (1 - \cos \alpha) + 1}.$$

Получается парадоксальный факт, противоречащий принципу общей ковариантности, что в одной системе материя «существует» все время и во всем пространстве, в другой только на определенных интервалах пространства-времени.

Определим границы изменения a , t , τ :

при $ct = 0$, $\eta = 0$, $a = 0$: $cT = 2a_0 (1 - \cos \chi)$;

при $\chi = 0$, $cT = a$: $ct = 0$, $ct = a_0 [\arcsin 2\sqrt{\cos \chi (1 - \cos \chi)} - 2\sqrt{\cos \chi (1 - \cos \chi)}] = 0$;

при $\chi = \pi/2$; $cT = 0$, $ct = a_0 \pi$.

Если $a = 2a_0$, то $\varepsilon = \pi$, $ct = a_0 \pi$, $cT = 2a_0$, $ct = a_0 \pi$. Из того, что $2a_0 > 0$ и cT не может быть отрицательным (иначе будет комплексным), следует, что $\cos \chi > 0$ или $0 \leq \chi \leq \pi/2$, а это противоречит общепринятому положению об изменении χ от 0 до π . (Аналогичные результаты имеют место и для двух других моделей Фридмана с $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = -1$).

Согласно принципу общей ковариантности любая система отсчета одинаково пригодна для описания одних и тех же явлений природы, если только эта система отсчета удовлетворяет определенным требованиям, а именно: переход от одной системы к другой происходит взаимно-однозначно с невырожденным якобианом преобразования.

В рассматриваемом случае этот принцип нарушается, поэтому приходится предположить (это обычно и делается), что центрально-симметричную систему отсчета не везде можно использовать. Однако легко показать, что это совершенно не верно, и разгадка противоречия имеет другой, более глубокий характер. Эйнштейн, а затем Фридман, обобщая решения для статической Вселенной, исходили из того, что раз мир однороден (и изотропен), то он должен быть вложен в плоское 4-пространство (мир — это гиперсфера в плоском 4-пространстве с кривизной, зависящей от времени). При этом полагалось для закрытого мира $r = a \sin \chi$ и $0 \leq \chi \leq \pi$. Однако мы видели, что в мире постоянной кривизны, когда

$\Delta_0 = A_\chi = \cos \chi$, и в мире переменной кривизны, когда

$$\Delta_0 = \frac{r \cos^2 \chi}{2a_0 \sin \chi} \sqrt{\frac{2a_0}{r} (1 - \cos \chi) \operatorname{tg} \chi + 1} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right),$$

при $\chi = \pi/2$ якобиан $\Delta_0 = 0$. Рассмотрим применение принципа соответствия для сопутствующей и центрально-симметричной систем отсчета. Для центрально-симметричной системы отсчета из уравнений сохранения в предположении, что поле слабое и $c \rightarrow \infty$, следует система уравнений, описывающих движение среды в ньютоновом гравитационном поле. Полагая затем $G = 0$, найдем обычные уравнения газовой динамики. Если же сначала положить $G = 0$, то найдем уравнения релятивистской газовой динамики, которые при $c \rightarrow \infty$ снова переходят в классические (во всем этом легко убедиться, произведя несложные выкладки). В сопутствующей системе отсчета при $G = 0$ будем иметь тривиальный результат $p = p_0 = \text{const}$, $\Sigma = \Sigma(r_0)$, $V = V(r_0)$, $\varepsilon = \varepsilon(r_0)$, $W = W(r_0)$. Если энтропия всюду постоянна, то при $\Sigma = \Sigma_0 = \text{const}$ имеем $V = V_0 = \text{const}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$, $W = W_0 = \text{const}$.

Осуществим предельный переход в основных уравнениях (8.37) при $G = 0$. Тогда $\sigma = \omega = 0$, $\exp \mu = r^2$, и уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} r'^2 - 1 - 2\ddot{r}r &= \dot{r}^2 = r'^2 - 1 + 2r''r; \\ r'' &= r; \dot{r}' = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\dot{r} = r'' = 0$, и общее решение этих уравнений запишется так:

$$r = Br_0 + \sqrt{B - 1} \, c\tau, \quad B = \text{const}.$$

Поскольку при $G = 0$

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + dr_0^2 + r^2 d\Omega^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

получаем $c^2 \tau^2 - r_0^2 = c^2 t^2 - r^2$. При скорости $u = 0$ должно быть $r = r_0$, $ct = \tau$. Отсюда очевидно, что надо положить $B^2 = 1 + B_0^2(u)$, причем $B_0(0) = 0$. Пусть $B = 1/\sqrt{1 - u_0^2}$, где $u_0 = \text{const}$, тогда

$$B_0^2 = \frac{u_0^2}{c^2 - u_0^2}; \quad r = \frac{r_0 + (u_0/c) c\tau}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}}; \quad ct = \frac{c\tau + (u_0/c) r_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}}$$

(преобразования Лоренца). Простой анализ полученных результатов показывает, что сопутствующая система имеет смысл только при наличии гравитационного поля, центрально-симметричную систему можно использовать всегда. Однако делать отсюда вывод, что при $G = 0$ сопутствующую систему применять нельзя, нет никаких оснований.

Выше мы установили, что основные уравнения гравитационного поля Эйнштейна $R_i^k - (1/2) R \delta_i^k = \kappa T_i^k$, как это ни странно, дают разные области решения в разных системах отсчета, несмотря на то, что используется общая метрика. Мы показали, что в нашей Вселенной в сопутствующей системе $a = r/\sin \chi$, где $0 \leq \chi \leq \pi/2$. Дальнейшие выводы подтвердили эту точку зрения и еще больше ограничили предельное значение χ . В самом деле, так как $u/c = \dot{a} \operatorname{tg} \chi$, для предельной скорости $u_0/c = \dot{a} \operatorname{tg} \chi_0$ будем иметь: $u_0/c = 1$; следовательно, $\dot{a} \operatorname{tg} \chi_0 = 1$.

Так как $\chi_0 = \text{const}$, получаем $\dot{a} = \text{const}$, что противоречит фридмановской модели, где $\dot{a} = f(a) \neq \text{const}$. (Для трех различных фридмановских моделей $\dot{a}^2 = 2a_0/a - \beta_1$.) Естественно, полагая $\dot{a} = 1$, находим, что $\chi_0 = \pi/4$. Таким образом, при $\beta_1 = 1$ область существования решения определяется как $0 \leq \chi \leq \pi/2$. При этом делается вывод, что использование центрально-симметричной системы отсчета в ОТО не корректно. Этот вывод не состоятелен, все системы отсчета равноправны и удовлетворяют принципу общей ковариантности. Если решения уравнений Эйнштейна в разных системах отсчета дают разные результаты (разные области существования решений), то это не означает, что одна система «лучше» другой, а лишь показывает, что уравнения ОТО по какой-то причине не

общековариантны. В чем же дело? Как было показано ранее [168], уравнение Эйнштейна при $\chi = \text{const}$ не инвариантно относительно масштабных преобразований (не обладает внешней конформной группой). Этой группой обладают уравнения Максвелла, безмассовые уравнения квантовой теории поля (без учета гравитации) и т. д.

Если взять лагранжиан

$$L = (R/R_0)^\alpha (R / 2 \kappa_0 + T^0 \sqrt{R_0/R}),$$

где $R_0 = \text{const}$; $\kappa_0 = \text{const}$; $T^0 = -p_0$ — след тензора энергии-импульса материи, то уравнения поля можно написать в виде

$$R_i^k - (1/2) R \delta_i^k = \kappa_0 (T_i^{0k} - \xi_i^k) \sqrt{R_0/R} - (1/2) R_i^k = \kappa_0 T_i^{*k};$$

$$R = -2\kappa_0 (T_0^0 + \varepsilon) \sqrt{R_0/R} = \kappa T^*,$$

где

$$\xi_i^k = - (A_i^k / \kappa_0) (R_0/R)^{\alpha-1/2};$$

$$A_i^k = \frac{\partial f}{\partial x^l} \left[\frac{1}{2} g^{ml} (g^{rk} g_{is} \Gamma_{rm}^s - \Gamma_{im}^k) + (g^{rk} \Gamma_{ir}^l - \delta_i^k g^{sm} \Gamma_{sm}^l) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} (g^{lm} \delta_i^k - g^{kl} \delta_i^m) \right]; f = (3/2) (R/R_0)^\alpha.$$

В сопутствующей системе

$$\xi_0^0 = - \frac{g_\alpha}{\kappa_0 a^2} \sqrt{\frac{R}{R_0}}; \quad \xi_1^1 = \frac{3\alpha(\alpha-1)}{\kappa_0 a^2} \sqrt{\frac{R}{R_0}}; \quad \xi = \frac{18\alpha(\alpha-1)}{\kappa_0 a^2} \sqrt{\frac{R}{R_0}}.$$

Величины $T_i^{0k} + \xi_i^k$ являются компонентами нового тензора энергии-импульса среды, причем $(T_i^k + \xi_i^k)_{;k} = 0$. Эти уравнения обладают масштабной инвариантностью: при этом $a = 1$ для любого α .

Если рассмотрим частный случай $\alpha = 0$, то $\xi_i^k = 0$ (в любой системе отсчета) и

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \kappa_0 T_i^{0k} \sqrt{\frac{R_0}{R}} - \frac{1}{2} R_i^k; \quad R = -2\kappa_0 T_0^0 \sqrt{\frac{R_0}{R}} = -\kappa_0 T^*,$$

и мы приходим к варианту вакуумной теории гравитации. При $\alpha = -1/2$ получим космологическую модель Дирака, при $\alpha = 1/2$ — космологическую модель, развитую нами ранее. От одной из этих моделей к другой можно перейти с помощью изменения масштаба расстояний. Тензор энергии—импульса материи для разных α различен.

Если рассмотреть до конца случай $\alpha=0$, то окажется, что $\beta_1 = 0$, $r = a\chi$ и модель Вселенной квазиевклидова, т. е. $\dot{u}/c = \chi \dot{a}$. При $\dot{a} = 1$ имеем $u/c = \chi$; при $\chi = 1$ получаем $u/c = 1$, $r = a$. В сопутствующей и центрально-симметричной системах отсчета области существования решения одинаковы. Якобиан преобразования $a \exp(\chi^2/2) (1 - \chi^2)/2a_0$; при $\chi \leq 1$: $u/c \leq 1$ и во всей области реального пространства-времени $\Delta_0 \geq 0$. При $\beta_1 = 0$ можно положить $2a_0 = a$ (для данного момента мирового времени). Тогда $\Delta_0 = \exp(\chi^2/2) (1 - \chi^2)$, а в центре $\Delta_0 = 1$. Вычислим теперь величину красного смещения. Преобразуем соотношение, определяющее скорость в центрально-симметричной системе отсчета. Очевидно, что

$$u/c = \dot{a}A/A_\chi = (Hl/c) A/\chi A_\chi,$$

где $H = \dot{c}a/a$; $l = a\chi$. Ранее, приближенно и лишь для относительно малых рас-

стояний, было получено соотношение $\bar{u}/c = Hl/c$. Таким образом,

$$u/\bar{u} = A/\chi A_\chi.$$

При $\beta_1 = 1$: $u/\bar{u} = (\operatorname{tg} \chi)/\chi = 1 + (1/3)\chi^2 + (2/15)\chi^4$; при $\beta_1 = 0$: $u/\bar{u} = 1$; при $\beta_1 = -1$: $u/\bar{u} = (\operatorname{th} \chi)/\chi = 1 - (1/2)\chi^2 + (2/15)\chi^4$. В рассматриваемом случае $u/c = \chi$, поэтому изменение частоты составит

$$\omega = \omega_0 \sqrt{(c-u)/(c+u)} = \omega_0 \sqrt{(1-\chi)/(1+\chi)}.$$

При $\alpha = 0$, поскольку имеет место соотношение $\lambda^3 = L^2 a$, $\lambda = \operatorname{const} \cdot a^{1/3}$, т. е. размеры частиц увеличиваются, что ведет к перенормировке величины красного смещения, особенно для внегалактических объектов.

В самом деле, атомы меньших размеров дают излучение большей частоты, оно принимается осциллятором (другим атомом) больших размеров, что несколько уменьшает эффект красного смещения (фиолетовое смещение) на заданном расстоянии. Скорость удаления оказывается больше, чем в модели с $\lambda = \operatorname{const}$ при $0 \leq \chi \leq 1$. Дадим краткий вывод основного соотношения, в котором учитываются оба эти эффекта (изменение частоты со временем и красное смещение). Частота испускаемого излучения

$$\omega_H = \omega_{H_0} (1/a_1)^{1/3} \sqrt{(1-\chi)/(1+\chi)},$$

частота принимаемого излучения

$$\omega_{\text{пр}} = \omega_{H_0} (L/a_2)^{1/3} \sqrt{(1-\chi)/(1+\chi)},$$

где $a_2 = a_1 + l = a_1 (1 + \chi_1)$; $\omega_{H_0} = (c/L) (z^2/n^3) (l^2/\hbar c)^2$; скорость удаления $u = \chi$; l — расстояние между наблюдателем и излучающим объектом в момент излучения, когда радиус кривизны Вселенной равен a_1 ; a_2 — радиус кривизны в момент прихода сигнала к наблюдателю. После несложных выкладок получаем соотношение

$$\omega_{\text{пр}} = \omega_H / (1 + \chi)^{1/3}, \quad \chi = \chi_1.$$

Теперь можно написать, что

$$[(1 - \chi^*) / (1 + \chi^*)]^{1/2} = \sqrt{(1 - \chi)/(1 + \chi)} (1 + \chi)^{-1/3},$$

где χ^* — перенормированная лагранжева координата, соответствующая модели, в которой $\lambda = \operatorname{const}$.

В общем виде для любого угла между направлениями движения источника и распространения света имеем

$$\omega_H = \omega_{H_0} (L/a)^{1/3} \sqrt{1 - \chi^2 / (1 - \chi \cos \alpha)};$$

$$\frac{1 - \chi^{*2}}{(1 - \chi^* \cos \alpha)^2} = \frac{1 - \chi^2}{(1 - \chi^* \cos \alpha) (1 + \chi)^{1/3}} = \frac{(1 - \chi)(1 + \chi)^{1/3}}{(1 - \chi \cos \alpha)^2},$$

откуда следует

$$\chi^* = \frac{\cos \alpha + A_0 \sqrt{A_0^2 - \sin^2 \chi}}{\cos^2 \alpha + A_0^2}; \quad A_0^{-2} = \frac{(1 - \chi)(1 + \chi)^{1/3}}{(1 - \chi \cos \alpha)^2}.$$

При движении источника к наблюдателю ($\alpha = \pi$)

$$\chi^* = (A_0^2 - 1)/(A_0^2 + 1); \quad A_0^2 = (1 + \chi)^{5/3}/(1 - \chi);$$

при $1 - \chi = \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$: $1 - \chi^* = \varepsilon^{-2/3} (1 - \chi)$; при $\chi \ll 1$: $\chi^* = (4/3)\chi - (1/6)\chi^2 + (32/81)\chi^3$. Если свет распространяется перпендикулярно направлению движения источника ($\alpha = \pi/2$), то $\chi^* = \sqrt{A_0^2 - 1}/A_0$; $A_0^2 = 1/(1 - \chi)(1 + \chi)^{1/3}$, или $\chi^* = 1 - (1 - \chi)(1 + \chi)^{1/3}$; при $1 - \chi = \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$: $1 - \chi^* = \varepsilon^{-2/3} (1 - \chi)$; при $\chi \ll 1$: $\chi^{*2} = (2/3)\chi + 4/9\chi^2 - (14/81)\chi^3$.

В вариантах моделей Вселенной, когда $\alpha = 1/2$ и $\alpha = -1/2$, перенормировка частоты не требуется, поскольку $\lambda = \text{const}$.

В заключение можно сделать несколько фундаментальных выводов.

1. Представление Эйнштейна о возможном существовании конечного замкнутого безграничного сферического пространства не состоятельно. «Подобно поверхности сферы, которая не имеет границ и имеет конечную площадь, сферическое пространство не имеет границ и занимает конечный объем. Это представление таит некоторую опасность: сферическое пространство не следует смешивать с объемом, лежащим внутри обычной сферы в трехмерном евклидовом пространстве. Такой объем имеет границу, а именно поверхность сферы, и вне этой сферы лежит большая часть «объема» евклидова пространства. Сферическое пространство не имеет подобной границы, вне которой лежала бы большая часть его объема» [169].

Это утверждение Мак-Витти также неверно. Ошибка Эйнштейна, как мы отмечали выше, заключалась в удвоении реального пространства. В самом деле, рассмотрим сразу нестационарную метрику

$$ds^2 = a^2 (-d\eta^2 + d\chi^2 + A^2 d\Omega^2).$$

Введя $r_0 = a_0 A(\chi)$, где $a_0 = \text{const}$, найдем

$$-ds^2 = (a^2/a_0^2) (-a_0^2 d\eta^2 + dr_0^2/A_\chi^2 + r_0^2 d\Omega^2).$$

Пусть $a_0 d\eta = a_0 d\xi + B(r_0) dr_0$. Тогда, требуя, чтобы $A_\chi^{-2} = 1 + B^2$, приходим к метрике с евклидовой пространственной частью

$$-ds^2 = (a^2/a_0^2) (-a_0^2 d\xi^2 - 2a_0 B d\xi dr_0 + dr_0^2 + r_0^2 d\Omega^2).$$

При $\beta_1 = 1$: $A = \sin \chi$, $B = \text{tg } \chi$; при $\beta_1 = 0$: $A = \chi$, $B = 0$ (метрика и так квазиевклидова); при $\beta_1 = 1$: $B = i \text{ th } \chi$ и преобразование не годится. Однако если написать

$$a_0 \exp \eta = \sqrt{c^2 t^2 - r_0^{*2}}, \quad r_0^*/ct = \text{th } \chi,$$

то получим

$$-ds^2 = [a^2/(c^2 t^2 - r_0^{*2})] [-c^2 dt^2 + dr_0^{*2} + r_0^{*2} d\Omega^2],$$

т. е. опять приходим к пространству с квазиевклидовой метрикой.

В этих метриках пространство представляет собой просто объем внутри сферы, вне которой находится вся остальная бесконечная Вселенная.

2. Нет полузамкнутых миров. Если радиус сферы $r_H > r_g$, то мир открыт, какая бы ни была метрика (эллиптическая, гиперболическая — безразлично); при $r_H = r_g$ мир замкнут. При $r_H \rightarrow r_g$ наблюдаемая масса убывает, поскольку $M_{\text{набл}} = \sqrt{-g_{00}} M = \sqrt{1 - r_g/r} M$.

3. Различные попытки построения «вторых» пространств иллюзорны, ибо их обоснования зиждятся на недопустимых преобразованиях координат.

8.4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ [162]

Легко найти несколько точных решений для автомоделных движений, которые мы изучили в переменных r, t . Основную систему уравнений напомним в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a_z^2}{1-a^2} - \frac{\kappa}{1-\kappa z} \right) (\xi + z) + \frac{2\xi - \xi_z(\eta - z)}{\xi + \eta} = 0; \quad (8.53)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a_z^2}{a^2(1-a^2)} - \frac{\kappa}{1-\kappa z} \right) (\eta - z) + \frac{2\xi - \eta_z(\xi + z)}{\xi + \eta} = 0; \quad (8.54)$$

$$2\xi + \xi_z (\xi + z) - \left[\frac{Tp_T^2}{c_V} - p_V \right] \frac{V}{p + \varepsilon} [2\eta + \eta_z (\xi + z)] = 0; \quad (8.55)$$

$$T'/T = (1 - a^2)/[z(1 - a^2) - (\eta + \xi a^2)]; \quad (8.56)$$

$$\exp v = ca\sqrt{1 - \kappa z} [T - T' (\xi + z)],$$

где $z = m/r$; $pr^2 = \xi(z)$; $\varepsilon r^2 = \eta(z)$; $\exp(-\lambda) = 1 - \kappa z$; $t = rT(z)$; $u/c = a(z)$.

Если газ идеальный и в пределе $p = (k - 1)\varepsilon$, то (8.55) выполняется тождественно; при этом $\xi = (k - 1)\eta$, и система (8.53), (8.54) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{a_z^2}{1 - a^2} - \frac{\kappa}{1 - \kappa z} \right] [(k - 1)\eta + z] + \frac{(k - 1)}{k} \frac{2\eta + \eta_z(\eta - z)}{\eta}; \quad (8.57)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{a_z^2}{a^2(1 - a^2)} - \frac{\kappa}{1 - \kappa z} \right] (\eta - z) + \frac{2(k - 1)\eta - \eta_z[(k - 1)\eta + z]}{k\eta}. \quad (8.58)$$

Пусть $(k - 1)\eta + z = 0$; тогда (8.57) удовлетворяется тождественно при $k = 2/3$; при этом $3p + \varepsilon = 0$, $p = -z/r^2$, т. е. в этом случае имеем уравнение состояния Эйнштейна. Уравнение (8.58) принимает вид:

$$a_z^2/(1 - a^2) a^2 - \kappa/(1 - \kappa z) = 4(k - 1)/k^2 z = 1/z,$$

откуда

$$da^2/a^2(1 - a^2) = dz^2/z(1 - \kappa z),$$

и после интегрирования получим

$$a^2(1 - a^2) = A_0^2 z/(1 - \kappa z),$$

где A_0^2 — постоянная интегрирования. Отсюда сразу находим, что

$$a = A_0 \sqrt{\frac{z}{1 + (A_0^2 - \kappa)z}} = A_0 \sqrt{\frac{m}{r + (A_0^2 - \kappa)m}}. \quad (8.59)$$

Далее запишем (8.56) в виде [заменяя a соответствующей функцией z из (8.59)]

$$dT/T = -(1 - \kappa z) dz/2z [1 + (A_0^2 - \kappa)z]$$

и после интегрирования найдем

$$T = Bz^{-1/2} [1 + (A_0^2 - \kappa)z]^{a_1},$$

где $a_1 = A_0^2/2(A_0^2 - \kappa)$; $B = \text{const.}$ Далее находим

$$\exp(-v/2) = A_0 B c \sqrt{1 - \kappa z} [1 + (A_0^2 - \kappa)z]^{a_1 \frac{\kappa}{A_0^2}}.$$

Заметим, что при этом

$$A = \exp \frac{\lambda - v}{2} = [1 + (A_0^2 - \kappa)z]^{a_1 \frac{\kappa}{A_0^2}}.$$

При $\kappa \rightarrow 0$: $\exp(-\lambda/2) = 1$, $\lambda = 0$, $\exp(-v/2) = 1$, $v = 0$, откуда $A_0 B c = 1$ и $B = 1/A_0 c$. Окончательно получаем:

$$T = ct/r = (1/A_0) z^{-1/2} [1 + (A_0^2 - \kappa) z]^{a_1};$$

$$\exp(-v) = (1 - \kappa z) [1 + (A_0^2 - \kappa) z]^{2a_1 \frac{\kappa}{A_0^2}}.$$

При $\kappa \rightarrow 0$: $a = A_0 \sqrt{z/(1 + A_0^2 z)}$; $cT = \sqrt{(1 + A_0^2 z)/z}$. Постоянная A_0 определяется из условия, что $a = a_0$ при $z = z_0$:

$$A_0 = a_0 \left(\frac{1 - \kappa z_0}{z_0 (1 - a_0^2)} \right)^{1/2}.$$

При $a \rightarrow 1$ произведение $\kappa z = \kappa m/r = 1$, что очевидно.

Эти соотношения позволяют полностью решить задачу для уравнения состояния среды, когда $\varepsilon + 3p = 0$. Поскольку $\xi + z = 0$, имеем $\gamma = 0$, $R = \bar{R}(z)$, $z = z(R)$, т. е. в данном случае z является лагранжевой координатой. Полученное ниже решение будет подробно исследовано.

Пусть $\eta = z$; тогда уравнение (8.54) удовлетворяется тождественно при $k = 2$; при этом $p = \varepsilon = z/r^2$. Уравнение (8.53) принимает вид:

$$\frac{a_z^2}{1 - a^2} = \frac{\kappa}{1 - \kappa z} - \frac{1}{z} = \frac{2\kappa z - 1}{z(1 - \kappa z)},$$

который после интегрирования позволит определить

$$a^2 = 1 - A_0^2 z (1 - \kappa z).$$

Далее находим стандартным способом

$$\frac{t}{r} = T = B [1 - A_0^2 z (1 - \kappa z)]^{a_1} \left[\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\kappa/A_0^2}} - A_0^2 z \right]^{a_2},$$

где

$$a_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\kappa/A_0^2}}{4\sqrt{1 - 4\kappa/A_0^2}}; \quad a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4\kappa}{A_0^2}}; \quad B = \text{const.}$$

Получим теперь

$$\exp\left(-\frac{v}{2}\right) = cB \sqrt{1 - \kappa z} \frac{[1 + A_0^2 z (1 - \kappa z)]^{a_1}}{\sqrt{1 + A_0^2 z (1 - \kappa z)}} \left[\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\kappa/A_0^2}} - A_0^2 z \right]^{a_2},$$

причем при $\kappa \rightarrow 0$ $v = 0$, откуда $Bc = 1$. Итак, окончательно имеем

$$\frac{ct}{r} = cT = [1 - A_0^2 z (1 - \kappa z)]^{a_1} \left[\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\kappa/A_0^2}} - A_0^2 z \right]^{a_2},$$

$$\exp\left(-\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \kappa z}{1 - A_0^2 z (1 - \kappa z)}} [1 - A_0^2 z (1 - \kappa z)]^{a_1} \times \\ \times \left[\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\kappa/A_0^2}} - A_0^2 z \right]^{a_2}.$$

Таким образом, задача нахождения решения с уравнением состояния $\varepsilon = p$ полностью решена.

Можно получить еще одно точное решение. Пусть $a^2 = \kappa z$, тогда из уравнения (8.53) имеем

$$2\xi = \xi_z (\eta - z),$$

а уравнение (8.54) дает

$$(\eta - z)/2z = [\eta_z (\xi + z) - 2\xi]/(\xi + \eta). \quad (8.60)$$

Пусть $\xi = \gamma z$. Тогда $2z = \eta - z$, откуда следует $\eta = 3z = (3/\gamma) \xi$, или $p = (\gamma/3) \varepsilon$. Значит, $\gamma = 3(k-1)$ — любая величина. При этом уравнение (8.60) тождественно удовлетворяется. Далее находим

$$t/r = T = (B/\sqrt{z}) [2 + \kappa (\gamma + 1) z]^{\frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}};$$

$$\exp(-v/2) = Bc \sqrt{\kappa} (\gamma + 3) [2 + \kappa (\gamma + 1) z]^{\frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}}.$$

При $\kappa = 0$ имеем $v = 0$, откуда получаем

$$B = \frac{2}{c \sqrt{\kappa} (\gamma + 3)} 2^{-\frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}},$$

что позволяет полностью решить данную частную задачу. В пределе при $\kappa \rightarrow 0$: $a \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, мы и находим в пределе без гравитационного поля условия равновесия среды, когда $p = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$. Легко привести систему уравнений (8.53), (8.54) к одному уравнению второго порядка. Определим сначала

$$a^2 = \left\{ \frac{\kappa}{1-\kappa z} - \frac{2(k-1)}{k[(k-1)\eta + z]} \left[2 - \frac{\xi_z (\eta - z)}{\eta} \right] \right\} \left\{ \frac{\kappa}{1-\kappa z} - \frac{2(k-1)}{k(\eta - z)} \times \right. \\ \left. \times \left[2 - \frac{\xi_z}{\eta} (\eta + z/k) \right] \right\}^{-1} = E/\Phi,$$

а затем найдем

$$(d/dz) [\ln (E/\Phi)] = \Phi - E$$

и окончательно получим

$$\frac{d}{dz} \ln \left\{ \left[\frac{\kappa}{1-\kappa z} - \frac{2(k-1)}{k} \frac{1}{(k-1)\eta + z} \left(2 - \frac{\xi_z}{\eta} (\xi - z) \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\kappa}{1-\kappa z} - \frac{2(k-1)}{k(\eta - z)} \left(2 - \frac{\xi_z}{\eta} \left(\eta + \frac{z}{k} \right) \right) \right]^{-1} \right\} + \frac{2(k-1)}{k} \left[\frac{1}{\eta - z} \times \right. \\ \left. \times \left(2 - \frac{\xi_z}{\eta} \left(\eta + \frac{z}{k} \right) \right) - \frac{1}{k-1} \left(\eta + \frac{z}{k-1} \right)^{-1} \left(2 - \frac{\xi_z}{\eta} (\eta - z) \right) \right] = 0.$$

Исследование и численное решение этого уравнения можно провести обычными методами.

8.5. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОППЕНГЕЙМЕРА—ВОЛКОВА ДЛЯ МАТЕРИИ С УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ $\varepsilon + 3p = 0$, $\varepsilon + 5p = 0$

Рассмотрим уравнения равновесия в собственном гравитационном поле [170] для материи с тензором энергии-импульса в виде $T_i^k = (p + \varepsilon) u_i u^k - p \delta_i^k$. Для центрально-симметричной метрики

$$-ds^2 = -c^2 \exp v dt^2 + \exp \lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (8.61)$$

эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\kappa p r^2 = \exp(-\lambda - v) [r \exp v]' - 1; \quad (8.62)$$

$$\kappa \varepsilon r^2 = 1 - [r \exp(-\lambda)]' \quad (8.63)$$

(здесь и далее штрих означает производную d/dr). Выпишем также единственное нетривиальное уравнение закона сохранения $T_{i;k}^k = 0$:

$$p' + [(p + \varepsilon)/2] v' = 0. \quad (8.64)$$

Из системы уравнений (8.62)—(8.64) легко следует известное уравнение Оппенгеймера—Волкова (8.36а). Это уравнение вместе с уравнением состояния $\varepsilon = \varepsilon(p)$ позволяет определить пространственное распределение плотности энергии $\varepsilon(r)$, после чего результат вычисления $\exp \lambda$ и $\exp v$ сводится к квадратурам. Несмотря на то, что уравнение (8.36а) можно привести к уравнению первого порядка, будет удобнее использовать систему (8.62)—(8.64).

Пусть уравнение состояния имеет вид:

$$p = k\varepsilon. \quad (8.65)$$

Тогда уравнение (8.63) легко интегрируется:

$$\varepsilon = (C/\kappa) \exp(\alpha v), \quad (8.66)$$

где C — постоянная интегрирования; $\alpha = -(k + 1)/2k$. Подставив (8.66) в (8.62) и (8.63) и введя обозначения $x = r \exp(-\lambda)$, $y = r \exp v$, найдем

$$kCr^{2-\alpha}y^\alpha = (x/y) y' - 1 = 0; \quad (8.67)$$

$$Cr^{2-\alpha}y^\alpha = 1 - x' = 0. \quad (8.68)$$

Легко найти решение системы (8.67)—(8.68) при $\alpha = 2$, $k = -1/5$. После несложных преобразований имеем

$$dx/dy = x(1 - Cy^2)/y[1 - (C/5)y^2].$$

Решение этого уравнения есть $x = C_1 y [1 - (C/5)y^2]^2$. Подставив его в (8.67) и возвращаясь к исходным переменным, с учетом (8.66) получим окончательно

$$1 - r_0/r = C_1 \sqrt{\kappa \varepsilon / C} (1 - \kappa \varepsilon r^2 / 15)$$

(здесь r_0 и C_1 — постоянные интегрирования). Уравнение состояния $p = -\varepsilon/5$, для которого справедливо это решение, по-видимому, не имеет определенного физического смысла, поэтому не будем подробнее рассматривать полученное решение.

Перейдем к более интересному решению, которое получается, если $\alpha = 1$. При этом $k = -1/3$, и находим уравнение состояния $p = -\varepsilon/3$, которое является, как известно, уравнением состояния гравитационного вакуума [24]. Сложив уравнения (8.67) и (8.68), получим $(2/3) Cry = (xy' - yx')/y$ и после интегрирования найдем

$$x/y = (C/3) (r_0^2 - r^2), \quad r_0 = \text{const.} \quad (8.69)$$

Подставив результат в (8.67) и решив полученное уравнение, получим, возвращаясь к исходным переменным, с учетом (8.66):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + C_2 \sqrt{\frac{C}{3}} \sqrt{\left| \frac{r_0^2}{r} - 1 \right|} \right), \quad (8.70)$$

где $\varepsilon_0 = 3/\kappa r_0^2$. Видно, что это решение описывает изменение плотности энергии в интервалах $0 < r < r_0$, $r_0 < r < \infty$. Выясним смысл постоянной $C_2 \sqrt{C/3}$ для наиболее интересного решения в интервале $0 < r < r_0$. Для этого найдем полную энергию материального шара:

$$E = 4\pi \int_0^{r_0} \varepsilon r^2 dr = \frac{4\pi}{3} r_0^2 \bar{\varepsilon},$$

где, очевидно, $\bar{\varepsilon}$ — средняя плотность энергии $C_2 \sqrt{C/3} = \bar{\varepsilon}/\varepsilon_0 - 1$.

Итак, перепишем окончательно (8.70) и получим метрические коэффициенты подстановкой (8.70) в (8.66) и (8.69):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon_0) \sqrt{r_0^2/r^2 - 1}; \\ \exp v &= \frac{3}{cr_0^2} \left[1 + \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \sqrt{\frac{r_0^2}{r^2} - 1} \right]; \\ \exp(-\lambda) &= 1 - \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{r^2}{r_0^2} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right)^{3/2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - 1 \right). \end{aligned}$$

Видно, что при r , близких к нулю, ε , $\exp v$, $\exp(-\lambda)$ возрастают неограниченно; таким образом, точка $r = 0$ — особая точка решения. Плотность энергии ε_0 , являющаяся, очевидно, минимальной, достигается на границе интервала изменения r в точке r_0 .

8.6. СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВО ВНЕШНЕМ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ [171]

Основные уравнения для стационарных движений среды в центрально-симметричном гравитационном поле получаем, исходя из уравнения $T_{i;k}^k = 0$:

$$u u_r / c^2 \theta^2 + p_r / (p + \varepsilon) + v_r / 2 = 0; \quad (8.71)$$

$$\varepsilon_r / (p + \varepsilon) + u_r / u \theta^2 + 2/r + v_r / 2 = 0; \quad (8.72)$$

$$\varepsilon_r + \Phi p_r = 0, \quad (8.73)$$

где

$$\Phi = [(p + \varepsilon)/V] (p_V - T p_T^2 / c_V). \quad (8.74)$$

Сложив (8.71) и (8.72), найдем

$$\frac{(p + \varepsilon)_r}{p + \varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{u_r^2}{c^2 \theta^2} \left(1 + \frac{c^2}{u^2} \right) + \frac{2}{r} = -v_r. \quad (8.75)$$

Это уравнение непосредственно интегрируется:

$$(p + \varepsilon) \frac{ur^2}{c\theta^2} = A \exp(-v). \quad (8.76)$$

Очевидно, что при этом должно быть задано внешнее поле, т. е. заданы $\exp v$ и $\exp \lambda$ как функции r .

В самом деле, если v и λ зависят только от r , то $\dot{\lambda} = 0$, и из уравнения поля для $T_0^1 \sim \dot{\lambda} \sim (p + \varepsilon) u/c$ следует, что или $u = 0$, или $p + \varepsilon = 0$. Таким образом, самосогласованных стационарных движений в центрально-симметричном гравитационном поле не существует. Эти движения только нестационарны. Пусть газ идеален, тогда $\Phi = -(p + \varepsilon)/kp$ и $kp d\varepsilon = (p + \varepsilon) dp$. Отсюда следует, что $p = (k - 1) \varepsilon - \bar{A} p^{1/k} = (k - 1) (\varepsilon - c^2/V)$, где $\bar{A} = \text{const}$. Исключим ε из (8.71) и (8.72). Поскольку $\varepsilon = p/(k - 1) + Bp^{1/k}$, получаем $\varepsilon_r =$

$= p_r [1/(k - 1) + (B/k) p^{\frac{1-k}{k}}]$, и уравнения (8.71), (8.72) принимают вид:

$$u_r^2/c^2\theta^2 + 2p_r/[kp(k - 1) + Bp^{1/k}] = -v_r; \quad (8.71a)$$

$$u_r^2/u^2\theta^2 + 4/r + 2p_r/kp = -v_r. \quad (8.72a)$$

Уравнение (8.76) запишем тогда следующим образом:

$$[kp/(k - 1) + Bp^{1/k}] ur^2/c\theta^2 = A \exp(-v). \quad (8.77)$$

Далее получаем:

$$\frac{B_0}{p^{1/k}} (p + \varepsilon) = \frac{B_0}{p^{1/k}} \left(\frac{k}{k-1} p + Bp^{1/k} \right) = \theta \exp\left(-\frac{v}{2}\right). \quad (8.78)$$

Поскольку для идеального газа $p^{1/k}V = \text{const}$, уравнение (8.78) принимает вид $\theta \exp(-v/2) = \text{const} \cdot W$, где $W = (p + \varepsilon) V$, или

$$W/\theta = W_0 \exp(-v/2), \quad (8.79)$$

где $W_0 = \text{const}$ — энтальпия. Уравнение (8.79) является уравнением Бернулли. К нему можно прийти более простым способом, используя тот факт, что для стационарных адиабатических процессов $dp/(p + \varepsilon) = V dp/W = dW/W$ и $du/2\theta^2c^2 + dW/W = -dv/2$.

Если из уравнений неразрывности в этом случае следуют соотношения ($\sigma = v$)

$$(\ln W)_r = u_r^2/2\theta^2u^2 + 2/r + v_r/2, \quad (8.80)$$

то, интегрируя, находим:

$$(ur^2/\theta Vc) \exp(v/2) = B_1 = \text{const}. \quad (8.80a)$$

Представим (8.76) в виде

$$\frac{(p + \varepsilon)}{\theta^2} \frac{u}{c} r^2 = \frac{W}{\theta} \frac{u}{c} \frac{r^2}{V\theta} = A \exp(-v).$$

Поскольку $W/\theta = W_0 \exp(-v/2)$, снова приходим к (8.79). Уравнения (8.77) и (8.78) определяют p и u как функции r .

Чтобы исключить u/c , удобно использовать уравнения (8.80a) и

$$(W/\theta) \exp(v/2) = W_0.$$

Разделив одно уравнение на другое, найдем

$$(ur^2/c) WV = B_1/W_0 = B_2,$$

откуда $u/c = B_2 W V / r^2$; $W \exp(v/2) [1 - B_2^2 W^2 V^2 / r^4]^{-1/2} = W_0$. Таким образом можно определить $W = W(r)$. Так как

$$W = (p + \varepsilon) V; p^{1/k} V = \text{const}; W = \text{const} \left(\frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} + B \right),$$

окончательно получим

$$\frac{\{[k/(k-1)] p^{\frac{k-1}{k}} + B\}^2 \exp v}{1 - \text{const} \{[k/(k-1)] p^{\frac{k-1}{k}} + B^2\} r^{-4} p^{-\frac{2}{k}}} = \text{const}.$$

Зная $v = v(r)$, находим $p = p(r)$. Задача полностью решена. Остается исследовать режимы течений.

8.7. О МОДЕЛИ ДЕ ДОНДЕРА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СОБСТВЕННОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ [172]

Де Дондер (1921 г.) и др. рассмотрели задачу о равновесии сферически-симметричного объема несжимаемой жидкости в собственном гравитационном поле с метрикой

$$-ds^2 = -\exp \bar{v} c^2 dt^2 + \exp \lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8.81)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.

Полученные ими результаты основаны на решении уравнений статического гравитационного поля в рамках ОТО

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -\frac{p + \varepsilon}{2} \frac{dv}{dr}; \quad \frac{d}{dr} [r \exp(-\lambda)] = 1 - \kappa \varepsilon r^2; \\ \exp(-\lambda) r dv/dr &= 1 + \kappa p r^2, \end{aligned} \quad (8.82)$$

причем $\lambda = \lambda(r)$, $v = v(r)$. Из этих уравнений следует фундаментальное уравнение для описания сферически-симметричной среды, находящейся в собственном гравитационном поле [уравнение Оппенгеймера—Волкова, см. (8.36a)]. После его интегрирования при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ имеем

$$\frac{1 + \kappa p r^2}{1 - [2r/(p + \varepsilon)] dp/dr} = 1 - \frac{\kappa \varepsilon_0 r^2}{3},$$

откуда следует

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\kappa r}{2 [1 - r^2/a^2]} (p + \varepsilon_0) \left(p + \frac{\varepsilon_0}{3} \right),$$

где $\kappa \varepsilon_0 / 3 = 1/a^2$. Вторично интегрируя при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$, получаем

$$p = \frac{\varepsilon_0}{3} \frac{3A \sqrt{1 - r^2/a^2} - 1}{1 - A \sqrt{1 - r^2/a^2}},$$

где $A = \text{const}$ — постоянная интегрирования. Из (8.82) легко находим

$$\exp \lambda = \frac{1}{1 - r^2/a^2}; \quad \exp \bar{v} = \left[\frac{1 - A \sqrt{1 - r^2/a^2}}{1 - A} \right]^2.$$

Для внешнего поля Шварцшильда имеем метрику

$$-ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2 d\Omega^2;$$

при $r = r_0$, поскольку $\exp \bar{\nu}$ и $\exp \lambda$ непрерывны, на границе выполняются условия:

$$1 - \frac{r_g}{r_0} = 1 - \frac{r_0^2}{a^2}; \quad \left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right) dt^2 = \left[\frac{1 - A \sqrt{1 - r_0^2/a^2}}{1 - A} \right]^2 d\bar{t}^2,$$

откуда следует, что

$$r_0^3 = r_g a^2; \\ \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} dt = \left[\frac{1 - A \sqrt{1 - r_g/r_0}}{1 - A} \right] d\bar{t}.$$

Вводя в (8.81)

$$d\bar{t} = dt \frac{(1 - A) \sqrt{1 - r_g/r}}{1 - A \sqrt{1 - r_g/r}} = dt \frac{(1 - A) \sqrt{1 - r_0^2/a^2}}{1 - A \sqrt{1 - r_0^2/a^2}},$$

находим

$$-ds^2 = -c^2 dt \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right) \frac{(1 - A \sqrt{1 - r_0^2/a^2})^2}{(1 - A \sqrt{1 - r_0^2/a^2})^2} + \frac{dr^2}{1 - r_0^2/a^2} + r^2 d\Omega^2.$$

Полагая, как обычно делают, на границе ($r = r_0$) $p = p_0 = 0$, находим, что $A = 1/3 \sqrt{1 - r_0^2/a^2}$, откуда следует

$$\left. \begin{aligned} p = \varepsilon_0 \frac{\sqrt{1 - r^2/a^2} - \sqrt{1 - r_0^2/a^2}}{3 \sqrt{1 - r_0^2/a^2} - \sqrt{1 - r^2/a^2}}; \\ -ds^2 = -c^2 dt^2 \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right)^2 + \\ + \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.83)$$

Из (8.83) очевидно, что $p \rightarrow \infty$ при

$$9 \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right) = 1 - \frac{r^{*2}}{a^2} \quad \text{или} \quad 9 \frac{r_0^2}{a^2} - \frac{r^{*2}}{a^2} = 8.$$

При этом $\exp \bar{\nu} = 0$, $\exp \nu = 0$, что делает решение малоприменимым для каких-либо физических выводов.

Если $a^2 = 3/\kappa \varepsilon_0 = r_0^2$, то $p + \varepsilon_0 = 0$. При $r = a$ получаем $p + \varepsilon_0/3 = 0$. Эти результаты проанализированы в [171].

Поскольку в рассматриваемой модели есть внешнее поле, т. е. не равная нулю кривизна R_{ilkm} , очевидно, что обычное условие $p_0 = 0$ при $r = r_0$ не корректно. В искривленном пространстве надо полагать, что при $r = r_0$ $p = p_0 \neq 0$. В этом случае

$$A = \frac{\varepsilon_0 + 3p_0}{3 (\varepsilon_0 + p_0) \sqrt{1 - r_0^2/a^2}}; \\ p = \varepsilon_0 \frac{(\varepsilon_0 + 3p_0) \sqrt{1 - r^2/a^2} - (\varepsilon_0 + p_0) \sqrt{1 - r_0^2/a^2}}{3 (\varepsilon_0 + p_0) \sqrt{1 - r_0^2/a^2} - (\varepsilon_0 + 3p_0) \sqrt{1 - r^2/a^2}}; \\ \exp \bar{\nu} = \left[\frac{3 (\varepsilon_0 + p_0) \sqrt{1 - r_0^2/a^2} - (\varepsilon_0 + 3p_0) \sqrt{1 - r^2/a^2}}{3 (\varepsilon_0 + p_0) \sqrt{1 - r_0^2/a^2} - (\varepsilon_0 + 3p_0)} \right]^2;$$

$$\exp v = \frac{1}{4\varepsilon_0^2} \left[3(\varepsilon_0 + p_0) \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{a^2}} - (\varepsilon_0 + 3p_0) \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right]^2.$$

При $r = r_0$

$$\begin{aligned} -ds^2 &= -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) + \frac{dr^2}{1 - r_0^2/a^2} + r^2 d\Omega^2 = \\ &= -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{r_g}{r_0} \right) + \frac{dr^2}{1 - r_g/r_0} + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

что подтверждает правильность «сшивки» внутреннего и внешнего решений.

Перейдем к вычислению геодезических. Для удобства введем $\sin \chi = r/a$. Тогда метрика (8.81) примет вид:

$$-ds^2 = -\left(\frac{1 - A \cos \chi}{1 - A} \right)^2 c^2 d\bar{t}^2 + a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2).$$

Положив, как обычно, $\theta = \pi/2$, найдем уравнения геодезических:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{ss} - \sin \chi \cos \chi \varphi_s^2 + \frac{A \sin \chi (1 - A \cos \chi)}{a^2 (1 - A)^2} c^2 \bar{t}_s^2 &= 0; \\ \varphi_{ss} + 2 \operatorname{ctg} \chi \chi_s \varphi_s &= 0; \quad \bar{c}t_{ss} + [2A \sin \chi / (1 - A \cos \chi)] \bar{c}t_s \chi_s = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.84)$$

Интегрируя последние два соотношения, получаем

$$\bar{c}t_s = \frac{A_1}{(1 - A \cos \chi)^2}; \quad \varphi_s = \frac{a A_2}{a^2 \sin^2 \chi} = \frac{a A_2}{r^2},$$

где $A_1 = \text{const}$; $A_2 = \text{const}$. Поскольку при $r = 0$, $dr = 0$: $\cos \chi = 1$, $\chi = 0$, $\bar{c}t = s$, имеем $A_1 = (1 - A)^2$. Подставив эти решения в первое уравнение (8.84), найдем, что

$$\chi_{ss} = \frac{A_2^2}{a^2} \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\chi}{\cos^2 \chi} \right) \right],$$

или

$$\chi_{\varphi\varphi} - 2 \operatorname{ctg} \chi \chi_{\varphi}^2 = \sin \chi \cos \chi - \frac{A A_1^2 \sin^5 \chi}{A_2^2 (1 - A)^2 (1 - A \cos \chi)^3}.$$

Однако выгодней вместо первого уравнения (8.84) использовать непосредственно уравнение для интервала:

$$1 = c^2 \bar{t}_s^2 \left(\frac{1 - A \cos \chi}{1 - A} \right)^2 - a^2 (\chi_s^2 + \sin^2 \chi \varphi_s^2),$$

или

$$\chi_{\varphi}^2 = \frac{a^2}{A_2^2} \sin^2 \chi \chi_s^2 = \frac{A_1^2 \sin^4 \chi}{(1 - A \cos \chi)^2 (1 - A)^2 A_2^2} - \sin^4 \chi \left(\frac{1}{\sin^2 \chi} + \frac{1}{A^2} \right).$$

Введя $z = \operatorname{ctg} \chi$, напомним это уравнение в виде

$$z_{\varphi}^2 = A_0^2 (1 + z^2) / (\sqrt{1 + z^2} - Az)^2 - (1 + z^2 + 1/A^2), \quad (8.85)$$

где $A_0^2 = A_1^2 / A_2^2 (1 - A)^2$. Дифференцируя (8.85) по φ , приходим к каноническому уравнению

$$z_{\varphi\varphi} + z = A A_0^2 / [\sqrt{1 + z^2} - Az]^3.$$

При $A = 0$: $z = z_0 \sin \varphi$, или $(a^2 - r^2)/r^2 = z_0^2 y^2/r^2$, откуда следует

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$$

где $b^2 = a^2/(1 + z^2)$, т. е. мы получили уравнение эллипса, отвечающего движению пробных частиц с любой скоростью в статическом пространстве Эйнштейна.

Для дальнейшего анализа выразим z_φ через r_φ :

$$-r_\varphi = z_\varphi a \cos \chi \sin^2 \chi = a z z_\varphi / (1 + z^2)^{3/2}.$$

Тогда (8.85) примет вид:

$$r_\varphi^2 = (a^2 - r^2) \frac{r^2}{a^2} \left[\frac{A_0^2 r^2}{(a - A \sqrt{a^2 - r^2})^2} - \left(1 + \frac{r^2}{A_2^2 a^2} \right) \right].$$

При $r_0 = r = a$: $\chi = \pi/2$, $r_\varphi = 0$, что дает условия касания геодезической к окружности $r = r_0 = a = \text{const}$. При $r = r_0 < a$: $\chi < \pi/2$, $r_\varphi \neq 0$, и никакая геодезическая не касается окружности $r = r_0$, а выходит наружу и сопрягается с внешней геодезической шварцшильдовского поля. Из этого важного и принципиального результата следует, что при $\chi = \pi/2$ достигается полная замкнутость сферы, заполненной несжимаемой жидкостью. Полученный результат не зависит от значения A , он справедлив и для решения де Дондера, когда $p_0 = 0$, $A \rightarrow \infty$, и для случая, когда $p_0 < 0$, $A = 0$. Таким образом, этот конкретный пример показывает, что Вселенная может быть или открыта, когда из нее выходят геодезические, или закрыта, когда все геодезические находятся в ней; полузамкнутых миров не существует.

Глава 9

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ОТО

9.1. ПЯТИМЕРИЕ: ОДНОРОДНЫЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВСЕЛЕННОЙ [173]

Рассмотрим, используя пятимерный формализм, однородные модели Вселенной, обобщающие решения де Ситтера.

Исследование однородных и изотропных моделей нестационарной Вселенной является важной задачей космологии. Эти модели удобнее всего изучать, рассматривая пятимерный геометрический формализм, как это делал де Ситтер, и считая, что четырехмерное кривое пространство-время вписано в пятимерное евклидово пространство.

Напишем пятимерный интервал в виде

$$-ds^2 = dx^{i^2} = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} + dx^{4^2} + dx^{5^2},$$

где

$$x^1 = r_5 \sin \chi \cos \varphi \sin \theta \sin \omega;$$

$$x^2 = r_5 \sin \chi \sin \varphi \sin \theta \sin \omega;$$

$$x^3 = r_5 \sin \chi \cos \theta \sin \omega;$$

$$x^4 = r_5 \cos \chi \sin \omega;$$

$$x^5 = r_5 \cos \omega,$$

причем $x^{i^2} = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + x^{4^2} + x^{5^2} = r_5^2$. Здесь $r_5 = a^*$, где a^* — радиус кривизны пятимерного пространства-времени (может быть переменным); 4-радиус $r_4 = r_5 \sin \omega = a^* \sin \omega = a$; 3-радиус $r_3 = r = r_4 \sin \chi = r_5 \sin \chi \sin \omega = (x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})^{1/2}$. При этом

$$x^1 = r_3 \cos \varphi \cos \theta; \quad x^2 = r_3 \cos \varphi \sin \theta; \quad x^3 = r_3 \sin \theta; \quad x^4 = r_4 \cos \chi = a \cos \chi.$$

Очевидно, что

$$dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} = dr_3^2 + r_3^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} dr &= dr_3 = a^* (\cos \chi \sin \omega dx + \sin \chi \cos \omega d\omega) + da^* \sin \chi \sin \omega; \\ dx^4 &= a^* (\cos \chi \cos \omega d\omega - \sin \chi \sin \omega d\chi) + da^* \cos \chi \sin \omega; \\ dx^5 &= -a^* \sin \omega d\omega + da^* \cos \omega, \end{aligned} \quad (9.1)$$

метрика

$$-ds^2 = a^{*2} \sin^2 \omega [\sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + d\chi^2] + a^{*2} d\omega^2 + da^{*2},$$

или

$$-ds^2 = r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 + (d\chi/\sin \chi)^2] + a^{*2} d\omega^2 + da^{*2}. \quad (9.2)$$

Введем радиус кривизны 3-пространства

$$r_4 = a = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + x^{4^2}} = a^* \sin \omega.$$

При этом (9.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} -ds^2 &= a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] + \frac{a^2 d\omega^2}{\sin^4 \omega} + \frac{da^2}{\sin^2 \omega} - \\ &\quad - \frac{2a da d\omega \cos \omega}{\sin^3 \omega}. \end{aligned}$$

Так как $r_3 = r_4 \sin \chi = a \sin \chi$, запишем

$$\frac{r d\chi}{\sin \chi} = \frac{dr - (r/a) da}{\sqrt{1 - r^2/a^2}}, \quad (9.3)$$

и (9.2) принимает вид:

$$\begin{aligned} -ds^2 &= \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{r^2}{a^2} \frac{da^2}{1 - r^2/a^2} - \frac{2(r/a) dr da}{1 - r^2/a^2} + \\ &\quad + \frac{a^2 d\omega^2}{\sin^4 \omega} + \frac{da^2}{\sin^2 \omega} - \frac{2a da d\omega \operatorname{ctg} \omega}{\sin^2 \omega}. \end{aligned}$$

При $\omega = \text{const}$ получим

$$-ds^2 = \frac{a^2 d\omega^2}{\sin^4 \omega} + \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (9.4)$$

Если

$$x^5 = ict = x^4 \operatorname{ctg} \omega / \cos \chi = r_4 \operatorname{ctg} \omega = a \operatorname{ctg} \omega,$$

то $ic dt = -a d\omega / \sin^2 \omega$, и (9.4) принимает вид:

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

т. е. приходим к обычной метрике Эйнштейна для однородного изотропного сферического пространства.

Если $a = a(t)$, то (9.3) записывается так:

$$-ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] - c^2 dt^2,$$

или

$$-ds^2 = a^2 [-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (9.5)$$

где $ict = a \operatorname{ctg} \omega$; $a^2 d\eta^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - da^2 = -(da^{*2} + a^{*2} d\omega^2)$. Таким образом,

$$c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 [1 + (1/c^2) (da^2/d\tau^2)] = c^2 d\tau^2 + da^2,$$

где $a = a(\tau)$. Сделаем некоторые преобразования. Поскольку $a^{*2} d\omega^2 + da^2 = da^2 - c^2 dt^2$ и

$$r^2 \left(\frac{d\chi}{\sin \chi} \right)^2 = \frac{dr^2 + (r^2/a^2) da^2 - 2(r/a) dr da}{1 - r^2/a^2},$$

(9.2) принимает вид:

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + da^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] + \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + \frac{(r^2/a^2) da^2}{1 - r^2/a^2} - \frac{2(r/a) dr da}{1 - r^2/a^2},$$

или

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{da^2}{1 - r^2/a^2} + \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} - \frac{2(r/a) dr da}{1 - r^2/a^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (9.6)$$

или

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \frac{(r^2/a^2) da^2}{1 - r^2/a^2} + \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} - \frac{2(r/a) dr da}{1 - r^2/a^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (9.7)$$

Обычный фридмановский интервал имеет вид:

$$-ds^2 = a^2 [-d\eta^2 + d\chi^2 + A^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (9.8)$$

где $a d\eta = c d\tau$ (τ — собственное время); $A = \sin \chi$; χ ; $\operatorname{sh} \chi$ — соответственно для сферического ($a^2 > 0$), квазиевклидова ($a^2 \rightarrow \infty$) и гиперболического ($a^2 < 0$) пространств.

В квазиевклидовом пространстве $a = b = b(\tau)$ есть просто масштабный фактор. Поскольку $r = aA$, имеем

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + r^2 d\chi^2/A^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Из равенства $dA/A = dr/r - da/a$ следует, что

$$\frac{r d\chi}{\chi} = \frac{dr - (r/a) da}{dA} d\chi = \frac{dr - (r/a) da}{\sqrt{1 - \beta_1 r^2/a^2}},$$

где $\beta_1 = 1; 0; -1$ соответственно для $A = \sin \chi$; χ ; $\operatorname{sh} \chi$. Отсюда

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \frac{r^2}{a^2} \frac{da^2}{1 - \beta_1 r^2/a^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{2(r/a) dr da}{1 - \beta_1 r^2/a^2},$$

т. е. приходим к интервалу (9.7) с учетом типа модели.

9.2. ЗАКРЫТАЯ МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ПОСТОЯННОЙ

Еще в 1937 г. Дирак [15] предположил, что в процессе расширения Вселенной эйнштейновская гравитационная постоянная $\kappa = 8\pi G/c^4$ убывает со временем. Однако при этом нарушается закон сохранения энергии. В [1] показано, что при постулировании закона сохранения энергии и масштабной инвариантности для свернутого уравнения $R = \operatorname{const} \kappa T$, где R — скалярная кри-

визна; T — след тензора энергии-импульса материи, получается уравнение $\kappa = \text{const}/E_0 \sqrt{R}$, где E_0 — полная энергия в закрытой модели. В этой же работе мы рассмотрели в сопутствующей системе отсчета процесс расширения Вселенной с постоянной скоростью (равной скорости света) на границе.

Изучим эту модель в центрально-симметричной системе отсчета аналогично тому, как это делается для классических моделей Фридмана [167], а также рассмотрим процесс расширения и в сопутствующей системе отсчета, считая, что расширяется образование, имеющее конечные начальные размеры.

В сопутствующей системе отсчета, как известно, имеют место соотношения [1]:

$$\left. \begin{aligned} R &= (6/a^2) (1 + \dot{a}^2/c^2 + \ddot{a}a/c^2); \\ R_0^0 &= 3\ddot{a}a/c^2 a^2; \\ R_1^1 &= R_2^2 = R_3^3 = (2/a^2) [1 + \dot{a}^2/c^2 + \ddot{a}a/2c^2], \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

где $\dot{a} = da/d\tau$.

Уравнения поля имеют вид:

$$(3/2) R_i^k - (\delta_i^k/2) R = \kappa (T_i^k + t_i^k),$$

где $T_i^k = (p + \varepsilon) u_i u^k + \delta_i^k p$ — тензор энергии-импульса обычной материи; t_i^k — дополнительный тензор энергии-импульса гравитационного поля. Отсюда получаем

$$R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa (T_i^k + t_i^k) - (1/2) R_i^k = \kappa T_i^{*k}, \quad (9.10)$$

где $T_i^{*k} = (p^* + \varepsilon^*) u_i u^k + \delta_i^k p^*$ — полный тензор энергии-импульса материи и поля. Свертывая (9.10), находим

$$R = -2\kappa (T + t) = -\kappa T^*.$$

Пусть в первом уравнении (9.9) имеем $\dot{a}^2/c^2 + \ddot{a}a/c^2 = 1$, отсюда следует, что

$$\dot{a}/c = v/c = c\tau/\sqrt{c^2\tau^2 + a_0^2} = \sqrt{1 - a_0^2/a^2} = c\tau/a.$$

Далее определяем $R_0^0 = 3a_0^2/a^4$; $R_1^1 = 4/a^2 - a_0^2/a^2$; $R = 12/a^2$, что и должно иметь место для данной модели. Прделав несложные выкладки, найдем, что

$$\varepsilon^* = (6/\kappa a^2) (1 - a_0^2/2a^2); \quad -p^* = 2/\kappa a^2 + a_0^2/\kappa a^4;$$

откуда следуют фундаментальные соотношения

$$\varepsilon^* - 3p^* = 12/\kappa a^2; \quad \varepsilon^* + 3p^* = -6a_0^2/\kappa a^4$$

(последнее для данной динамической модели является аналогом уравнения состояния в статической модели Эйнштейна). Связь между T_i^k , t_i^k , T_i^{*k} определяется соотношениями

$$t_1^1 = -[p + (3/2) a_0^2/\kappa a^4]; \quad t_0^0 = -6/\kappa a^2 + 9a_0^2/2\kappa a^4 + \varepsilon;$$

$$\varepsilon - 3p - t = \varepsilon^* + 3a_0^2/\kappa a^4 = 6/\kappa a^2 = (1/2) (\varepsilon^* - 3p^*).$$

Запишем выражение для полной плотности энергии в центрально-симметричной системе отсчета:

$$\varepsilon_0^* = -T_0^{*0} = \frac{\varepsilon^* + (u^2/c^2) p^*}{1 - u^2/c^2} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left[\varepsilon^* \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) - \frac{2a_0^2 u^2}{\kappa a^4 c^2} \right].$$

Метрика в сопутствующей системе имеет вид:

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2] = -c^2 d\tau^2 + a^2 d\chi^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Будем искать метрику в центрально-симметричной системе отсчета

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 \exp v + dr^2 \exp \lambda + r^2 d\Omega^2.$$

При этом, зная $\tau = \tau(r, \chi)$, находим $t = t(r, \chi)$, причем $v = v(r, \chi)$, $\lambda = \lambda(r, \chi)$. Для определения t , v , λ имеем уравнения

$$t_r (a^2 - c^2 \tau_r^2) + c \tau_r c \tau_r t_\chi = 0;$$

$$\exp v = \tau_r \tau_\chi / t_r t_\chi; \quad \exp \lambda = c^2 \tau_r^2 (t_r \tau_\chi / t_\chi \tau_r - 1).$$

Поскольку $r = a \sin \chi$, запишем:

$$c\tau = \sqrt{r^2 / \sin^2 \chi - a_0^2};$$

$$c\tau_r = \frac{r}{\sin^2 \chi \sqrt{r^2 / \sin^2 \chi - a_0^2}};$$

$$c\tau_\chi = -\frac{r^2 \cos \chi}{\sin^3 \chi \sqrt{r^2 / \sin^2 \chi - a_0^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$rt_r = [\cos 2\chi + (a_0^2/r^4) \sin^4 \chi] + (1/2) \sin(2\chi) t_\chi = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$r = \sin \chi \sqrt{T^2(t) \cos^2 \chi + a_0^2}.$$

При $\chi = 0$, $r = 0$, полагая $t = \tau$, найдем, что $T = ct$ и

$$r/\sin \chi = \sqrt{c^2 t^2 \cos^2 \chi + a_0^2} = a = \sqrt{c^2 \tau^2 + a_0^2}.$$

Отсюда следует, что

$$ct = (1/\cos \chi) \sqrt{r^2 / \sin^2 \chi - a_0^2} = c\tau / \cos \chi. \quad (9.11)$$

Вычислим ct_r , ct_χ и найдем:

$$\exp v = \frac{\cos^2 \chi (c^2 t^2 \cos^2 \chi + a_0^2)}{c^2 t^2 \cos(2\chi) + a_0^2};$$

$$\exp \lambda = \frac{c^2 t^2 \cos^2 \chi + a_0^2}{\cos^2 \chi [c^2 t^2 \cos(2\chi) + a_0^2]}.$$

Теперь легко определить

$$\frac{u}{c} = \exp \frac{\lambda - v}{2} \left(\frac{\partial r}{c \partial t} \right)_\chi = \operatorname{tg} \chi \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{c^2 t^2 \cos^2 \chi}} = \frac{v}{c} \operatorname{tg} \chi.$$

В сопутствующей системе отсчета

$$R_0^0 - R/2 = \kappa (T_0^0 + t_0^0) - R_0^0/2 = \kappa T_0^{*0} = -\kappa \varepsilon^*, \quad (9.12)$$

откуда $\varepsilon^* = (6/\kappa a^2) (1 - a_0^2/2a^2)$. Тогда в центрально-симметричной системе отсчета

$$\varepsilon^* = (6 \sin^2 \chi / \kappa r^2) (1 - a_0^2 \sin^2 \chi / 2r^2).$$

Это выражение легко проверить непосредственно вычислениями, сделанными в центрально-симметричной системе отсчета, используя соотношения (9.11).

Закон сохранения энергии имеет вид:

$$E_0 = -4\pi \int_0^{r_0} T_0^{*0} r^2 dr = \frac{4\pi r_0}{\kappa} (1 - \exp(-\lambda_0)),$$

где $r_0 = a \sin \chi_0$ — граничное значение r ; χ_0 — граничная лагранжева координата. Подставив значение λ_0 , получим

$$E_0 = \frac{4\pi r_0 \sin^2 \chi_0}{\kappa} \frac{2c^2 t^2 \cos^2 \chi_0 + a_0^2}{c^2 t^2 \cos^2 \chi_0 + a_0^2};$$

$$\frac{u}{c} = \operatorname{tg} \chi / \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{c^2 t^2 \cos^2 \chi}}. \quad (9.13)$$

Отсюда следует, что при $t \rightarrow \infty$ $u/c = \operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \chi_0$; поскольку $u_{\text{гр}}/c = 1$, имеем $\operatorname{tg} \chi_0 = 1$, $\chi_0 = \pi/4$.

Учитывая, что

$$u/c = (1 + 2a_0^2/c^2 t^2)^{-1/2}, \quad (9.14)$$

соотношение (9.13) можно записать в виде

$$E_0 = \frac{4\pi r_0}{\kappa} \frac{c^2 t^2 + a_0^2}{c^2 t^2 + 2a_0^2} = \frac{4\pi r_0}{\kappa} \left(1 - \frac{a_0^2}{2a^2}\right),$$

откуда следует, что

$$\kappa E_0 / 4\pi r_0 = 2GM_0 / r_0 c^2 = 1 - a_0^2 / 2a^2 = r_g / r_0,$$

где $r_g = 2GM_0/c^2$ — гравитационный радиус Вселенной; $M_0 = E_0/c^2 = (4/3) \times \pi \rho^* r_0^3$ — ее полная масса. Поскольку

$$r_0^2 = c^2 t^2 / 4 + a_0^2 / 2 = (1/2) (c^2 \tau^2 + a_0^2) = a^2 / 2, \quad r_0 = a \sqrt{2} / 2,$$

имеем

$$\frac{2GM_0}{c^2 a} = \left(1 - \frac{a_0^2}{2a^2}\right) \frac{r_0}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{a_0^2}{2a^2}\right).$$

При $a = a_0$: $2GM_0 / r_0 c^2 = r_g / r_0 = 1$, $r_g / a = \sqrt{2} / 4$; при $a \rightarrow \infty$: $r_g / r = 1$, $r_g / a = \sqrt{2} / 2$.

Поскольку $\rho^* = \rho^*(\tau)$ и не зависит от χ , из соотношения (9.12) следует

$$GM_0^* / ca = 1 - a_0^2 / 2a^2,$$

где $M_0^* = (4/3) \pi \rho^* a^3$.

При $a = a_0$: $2GM_0^* / c^2 a_0 = r_g / r = 1$, при $a \rightarrow \infty$: $r_g / 2a = 1$; $2M_0 a / r_0 M_0^* = 2\sqrt{2} M_0 / M_0^* = 1$, откуда следует, что $M_0^* = 2\sqrt{2} M_0$.

Поскольку на границе $\chi = \pi/4$, истинная масса для данной модели Вселенной есть M_0 . При этом $2GM_0 / r_0 c^2 = 1$.

Следует отметить, что из (9.14) при $t = 0$ $u/c = 0$, при $\chi = 0$ $u = 0$, на границе разлета $u_{\text{гр}}/c = v_{\text{гр}}/c$, т. е. $u_{\text{гр}} = v_{\text{гр}}$. При этом имеет место соотношение $ct_a = ct_r$, т. е. на границе разлета выполняются условия Лоренца для инвариантного интервала.

Проведенные вычисления для модели Вселенной Фридмана при $\kappa \sim 1/\sqrt{R}$ показывают, что в сопутствующей и центральной системах отсчета области существования одинаковы. В случае классических моделей Фридмана при $\kappa = \text{const}$, как это следует из работ [173, 174], области существования движения материи (существования решения) различны. В центрально-симметричной системе отсчета область существования меньше, чем в сопутствующей, поскольку скорость вещества в определенных областях пространства-времени оказывается сверхсветовой, что противоречит СТО. Здесь мы привели пример такой модели Вселенной, когда в сопутствующей и центральной системах отсчета области движения материи одинаковы, что представляет определенный интерес для космологии [276].

9.3. МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ, УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ДЛЯ МЕТАГАЛАКТИКИ [175]

В настоящее время можно считать твердо установленными следующие соотношения, связывающие ФК микро- и макромира [24]:

$$2GM_0/c^2 a = 1; \quad 2G\hbar a/c^3 = \lambda^3.$$

К ним можно присоединить соотношение неопределенностей

$$\lambda = \hbar/mc.$$

Наиболее общие уравнения гравитационного поля, описывающие Вселенную и удовлетворяющие этим соотношениям и применимые для описания основных параметров элементарных частиц, можно получить из вариации следующего лагранжиана:

$$L = \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \frac{R}{2\kappa_0} + p_M^0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta = \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \left[\frac{R}{2\kappa_0} + p_M^0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta-\alpha} \right],$$

где R_0 — постоянная скалярная кривизна; R — варьируемая скалярная кривизна; p_M^0 — скалярное суммарное давление сплошной среды и самого гравитационного поля; $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Будем варьировать действие

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d\Omega,$$

$$\text{где } \mathcal{L} = \sqrt{-g} L = \sqrt{-g} \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \left[\frac{R}{2\kappa_0} + p_M^0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta-\alpha} \right] -$$

плотность лагранжиана. Поскольку

$$\delta(\sqrt{-g}) = -(1/2) \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik}; \quad \delta(\sqrt{-g} p_M^0) = -(1/2) T_{ik}^0 \delta g^{ik},$$

где T_{ik}^0 — тензор энергии-импульса материи, соответствующий скалярному давлению p_0 ;

$$\delta \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \frac{R}{2\kappa_0} = \frac{\alpha+1}{2\kappa_0} \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha (R_{ik} \delta g^{ik} + g^{ik} \delta R_{ik}),$$

получим произведение

$$p_M^0 \delta \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta = \frac{\beta p_M^0}{R} \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta (R_{ik} \delta g^{ik} + g^{ik} \delta R_{ik}).$$

Отсюда придем к соотношению

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{-g} \left[\frac{\alpha+1}{2\kappa_0} \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha + \frac{\beta p_M^0}{R} \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \right] (R_{ik} \delta g^{ik} + g^{ik} \delta R_{ik}) d\Omega - \\ & - \int \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \frac{R}{2\kappa_0} g_{ik} \delta g^{ik} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik}^0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \delta g^{ik} \right) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Поскольку

$$f(R) \sqrt{-g} g^{ik} \delta R_{ik} = f(R) \left(A_{ik} \delta g^{ik} + B_{ik}^l \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + C_{ik}^{lm} \delta \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^m} \right),$$

где

$$\frac{\partial D_{ik}^l}{\partial x^l} = A_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(3g^{ml} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - 2g^{ml} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \delta_k^l g^{rm} \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i} \right);$$

$$B_{ik}^l = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(3g^{ml} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - 2g^{ml} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - 2\delta_k^l g^{rm} \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^i} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{-g} g^{lm} g_{ik});$$

$$C_{ik}^{lm} = \sqrt{-g} (g^{lm} g_{ik} - \delta_i^m \delta_k^l),$$

подставив (9.15) в уравнение Лагранжа

$$\left(\frac{\partial L}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial L}{\partial (\partial g^{ik} / \partial x^l)} + \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial L}{\partial (\partial^2 g^{ik} / \partial x^l \partial x^m)} \right) = 0, \quad (9.16)$$

найдем, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \left\{ \left[\alpha + 1 + \frac{2\kappa_0 \beta p^0}{R} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta - \alpha} \right] R_{ik} - \right. \\ & \left. - \kappa_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta - \alpha} T_{ik}^0 - \frac{R}{2} g_{ik} \right\} + \theta_{ik} = 0, \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\text{где } \sqrt{-g} \theta_{ik} = f(R) A_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l} [f(R) B_{ik}^l] + \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} [f(R) C_{ik}^{lm}] = 0.$$

$$\text{Здесь } f(R) = \left[\alpha + 1 + 2\kappa_0 \frac{p^0}{R} (R/R_0)^{\beta - \alpha} \right] (R/R_0)^\alpha.$$

Преобразуем выражение для

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \theta_{ik} = f(R) & \left(A_{ik} - \frac{\partial B_{ik}^l}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 C_{ik}^{lm}}{\partial x^l \partial x^m} \right) + \frac{\partial f}{\partial x^l} \left(2 \frac{\partial C_{ik}^{lm}}{\partial x^m} - B_{ik}^l \right) + \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} C_{ik}^{lm}. \end{aligned}$$

Как легко убедиться простыми подстановками,

$$A_{ik} - \partial B_{ik}^l / \partial x^l + (\partial^2 / \partial x^l \partial x^m) C_{ik}^{lm} = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \theta_{ik} &= \frac{\partial f}{\partial x^l} \left(2 \frac{\partial C_{ik}^{lm}}{\partial x^m} - B_{ik}^l \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} C_{ik}^{lm} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^l} \left(\frac{\partial C_{ik}^{lm}}{\partial x^m} - D_{ik}^l \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} C_{ik}^{lm} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(C_{ik}^{lm} \frac{\partial f}{\partial x^l} \right) - D_{ik}^l \frac{\partial f}{\partial x^l}. \end{aligned}$$

Произведя простые преобразования, найдем, что

$$\begin{aligned} \theta_{ik} &= \frac{\partial f}{\partial x^l} \left[\frac{1}{2} g^{ml} (g_{is} \Gamma_{km}^s - g_{ks} \Gamma_{im}^s) + (\Gamma_{ik}^l - g_{ik} g^{sm} \Gamma_{sm}^l) \right] + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} (g^{lm} g_{ik} - \delta_i^m \delta_k^l). \end{aligned}$$

Теперь формулу (9.17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left[\alpha + 1 + \frac{2\kappa_0 \beta p_M^0}{R} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta - \alpha} \right] R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \kappa_0 T_{ik}^0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta - \alpha} + \\ & + \left(\frac{R_0}{R} \right)^\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} (g^{lm} g_{ik} - \delta_i^m \delta_k^l) + \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^l} \left[\frac{1}{2} g^{ml} (g_{is} \Gamma_{km}^s - g_{ks} \Gamma_{im}^s) + \right. \\ & \left. + (\Gamma_{ik}^l - g_{ik} g^{sm} \Gamma_{sm}^l) \right] = 0, \end{aligned} \quad (9.18)$$

причем (9.18) является масштабно-инвариантным уравнением общего гравитационного поля Вселенной. При $\alpha = 0$; $\beta \neq 0$.

$$R_{ik} \left(1 + \frac{2\kappa_0 \beta p_M^0}{R} \left(\frac{R}{R_0} \right)^\beta \right) - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa_0 T_{ik}^0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\beta.$$

При $\beta = 0$ получим обычные уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} - (1/2) g_{ik} R = \kappa_0 T_{ik}^0.$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^l} \left[\frac{1}{2} g^{ml} (g_{is} \Gamma_{km}^s - g_{ks} \Gamma_{im}^s) + (\Gamma_{ik}^l - g_{ik} g^{sm} \Gamma_{sm}^l) \right] + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} (g^{lm} g_{ik} - \delta_i^m \delta_k^l) = -\kappa_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\beta \theta_{ik}, \end{aligned}$$

тогда уравнение (9.16) примет вид:

$$\left[\alpha + 1 + \frac{2\kappa_0 \beta p_M^0}{R} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta-\alpha} \right] R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta-\alpha} (T_{ik}^0 + \theta_{ik}). \quad (9.19)$$

Свернем уравнение (9.19):

$$R = [\kappa_0 / (\alpha - 1)] (R/R_0)^{\beta-\alpha} (T^0 + \theta - 2\beta p_M^0)$$

и напомним его в виде

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \kappa_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta-\alpha} (T_i^{0k} + \theta_i^k) - \gamma R_i^k = \kappa_0 T_i^{*k} \quad (9.20)$$

где

$$\gamma = \alpha + \frac{2\beta(\alpha-1)p_M^0}{T^0 + \theta - 2\beta p_M^0} = \frac{\alpha(T^0 + \theta) - 2\beta p_M^0}{T^0 + \theta - 2\beta p_M^0},$$

причем можно принять, что $\gamma = \text{const}$ (из дальнейшего это будет очевидно). В этих соотношениях

$$\begin{aligned} \theta_i^k = \left(\frac{R_0}{R} \right)^\beta \frac{g^{kr}}{\kappa_0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^l} \left[\frac{1}{2} g^{ml} (g_{is} \Gamma_{rm}^s - g_{rs} \Gamma_{im}^s) + (\Gamma_{ir}^l - g_{ir} g^{sm} \Gamma_{sm}^l) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} (g^{lm} g_{ir} - \delta_i^m \delta_r^l) \right\}; \end{aligned}$$

$$T_i^{*k} = (R/R_0)^{\beta-\alpha} (T_i^{0k} + \theta_i^k) - \gamma R_i^k / \kappa_0.$$

Поскольку $(R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R)_{;k} = 0$; $T_{i;k}^{*k} = 0$, можно, полагая $(T_i^{0k} + \theta_i^k)_{;k} = \bar{T}_{i;k}^k = 0$, найти, что должно выполняться условие

$$(\beta - \alpha)(\gamma + 1) R_i^k \partial R / \partial x^k = (1/2)(\gamma + \beta - \alpha) R \partial R / \partial x^i. \quad (9.21)$$

Нам необходимо определить две из трех констант α , β , γ . Будем считать, что α произвольно, и найдем два соотношения, связывающих β и γ с α .

Поскольку $2GM_0/c^2 a = 1$, или $\kappa E_0/4\pi = a$, где $E_0 = Mc^2$ — энергия Вселенной, плотность энергии или давление среды Метагалактики $c^2 \rho_0 \sim a^{-2}$. Давление p_M^0 , дающее при вариации часть тензора энергии-импульса материи, очевидно, зависит от кривизны как $p_M^0 \sim a^3$. Так как $p^0 = p_M^0 (R/R_0)^{\beta-\alpha}$, имеем $(R/R_0)^{\beta-\alpha} = a/a_0$, что дает $R/R_0 = (a/a_0)^{1/(\beta-\alpha)}$.

Далее, поскольку $R/2\kappa_0 \sim p_M^0 (R/R_0)^{\beta-\alpha}$ и $p^0 \sim a^{-2}$, находим $(a_0/a)^{2(\beta-\alpha)} = a/a_0$, откуда следует, что $(a_0/a)^{2(\beta-\alpha)+1} = 1$, т. е. $\beta - \alpha = -1/2$, или

$\beta = \alpha - 1/2$. При этом (9.21) принимает вид:

$$-(\gamma + 1) R_i^k \partial R / \partial x^k = (1/2) (2\gamma - 1) R \partial R / \partial x^i, \quad (9.22)$$

причем

$$\gamma = \frac{\alpha (T^0 + \theta) - (2\alpha - 1) p_M^0}{T^0 + \theta - (2\alpha - 1) p_M^0} = \frac{\alpha (T^0 + \theta - 2p_M^0) + p_M^0}{T^0 + \theta + p_M^0 - 2\alpha p_M^0}. \quad (9.23)$$

Для сопутствующей системы отсчета в однородной и изотропной модели

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = (2/a^2) (\beta_1 + \dot{a}^2/c^2 + a\ddot{a}/2c^2);$$

$$R = (6/a^2) (\beta_1 + \dot{a}^2/c^2 + a\ddot{a}/c^2);$$

$$R_0^0 = \text{см. (9.9)}.$$

$\beta_1 = 1, 0, -1$ соответственно для трех возможных моделей. Поскольку $R \sim a^{-2}$, имеем $\beta_1 + \dot{a}^2/c^2 + a\ddot{a}/a^2 = \text{const}$; отсюда в частном случае следует, что $\dot{a}/c = 1$; $\ddot{a} = 0$; $R_0^0 = 0$; $R_1^1 = (2/a^2) (\beta_1 + 1)$; $R = (6/a^2) (\beta_1 + 1)$.

Левая часть (9.22) при этом тождественно равна нулю, откуда $\gamma = 1/2$. Формула (9.23) дает $(2\alpha - 1) (T^0 + \theta) = (2\alpha - 1) p_M^0$. Если $\alpha \neq 1/2$, то $p_M^0 = T^0 + \theta$, что очевидно. Если $\alpha = 1/2$; $\beta = 0$; $\gamma = 1/2$, то получаем $f = (3/2) \times \sqrt{R/R_0}$. Связь между p_M^0 и $T^0 + \theta$ может быть произвольной, например $p_M^0 = T^0 + \theta$.

Основное уравнение поля (9.20) теперь окончательно примет вид:

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \kappa_0 \sqrt{\frac{R_0}{R}} (T_i^{0k} + \theta_i^k) - \frac{1}{2} R_i^k = \kappa_0 T_i^{*k}. \quad (9.24)$$

Оно практически имеет тот же вид, что и выведенное ранее в [1] уравнение. Свернув (9.24), получим

$$\begin{aligned} R &= \frac{\kappa_0}{\alpha - 1} \sqrt{\frac{R_0}{R}} [T^0 + \theta - (2\alpha - 1) p_M^0] = -2\kappa_0 \sqrt{\frac{R_0}{R}} (T^0 + \theta); \\ \theta_i^k &= \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\alpha - 1/2} \frac{g^{kr}}{\kappa_0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^l} \left[\frac{1}{2} g^{ml} (g_{is} \Gamma_{rm}^s - g_{rs} \Gamma_{im}^s) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\Gamma_{ir}^l - g_{ir} g^{sm} \Gamma_{sm}^l) \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^m} (g^{lm} g_{ir} - \delta_i^m \delta_r^l) \right\}, \end{aligned} \quad (9.25)$$

где

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \left[\alpha + 1 + \frac{(\alpha + 1) (T^0 + \theta) + (\alpha - 1) (2\alpha - 1) p_M^0}{T^0 + \theta - (2\alpha - 1) p_M^0} \right] = \\ &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \frac{(\alpha + 1) (T^0 + \theta) - 2(2\alpha - 1) p_M^0}{T^0 + \theta - (2\alpha - 1) p_M^0}. \end{aligned}$$

Если $\alpha = 1$, то из (9.25) следует, что $T^0 + \theta = p_M^0$ и $R = -2\kappa_0 \sqrt{R_0/R} \times (T^0 + \theta)$; значит, α действительно может быть произвольным. Очевидно, поскольку $R = -2\kappa_0 \sqrt{R_0/R} p_M^0$, лагранжиан $L \equiv 0$, что и должно иметь место.

Определим теперь связь между тензорами $\bar{T}_i^k = T_i^{0k} + \theta_i^k$ и T^{*k} . Так как

$$\sqrt{R_0/R} \bar{T}_i^k - (1/2\kappa_0) R_i^k = T_i^{*k}, \quad (9.26)$$

$$\text{имеем } \sqrt{R_0/R} T - R/2\kappa_0 = T^*, \text{ а из } R/2\kappa_0 = -\sqrt{R_0/R} (T^0 + \theta) = -\sqrt{R_0/R} T \quad (9.27)$$

следует, что $2\sqrt{R_0/R} \bar{T} = T^*$. Далее из (9.24) имеем

$$R_i^k = \kappa_0 [T_i^{*k} - (1/2) \delta_i^k T^*], \quad (9.28)$$

а из (9.26)–(9.28) получаем:

$$\sqrt{R_0/R} \bar{T}_i^k = (1/2) [3T_i^{*k} - (1/2) \delta_i^k T^*];$$

$$T_i^{*k} = (1/3) \sqrt{R_0/R} (2 \bar{T}_i^k + \delta_i^k \bar{T}).$$

Вычислим компоненты тензора T_i^{*k} для однородной изотропной модели Вселенной. Очевидно, что

$$\varepsilon^* = -T_0^{*0} = \frac{R}{2\kappa_0} = \frac{3}{\kappa_0 a^2} (\beta_1 + 1); \quad p^* = T_1^{*1} = -\frac{1}{\kappa_0 a^2} (\beta_1 + 1);$$

$$\varepsilon^* - 3p^* = -T^* = (6/\kappa_0 a^2) (\beta_1 + 1); \quad \varepsilon^* + 3p^* = 0.$$

Далее находим, что $8\pi G\varepsilon^* a^2/3c^2 = (4/3) \pi \varepsilon^* a^3 2G/ac^2 = \beta_1 + 1$, или $2GM/c^2 a = \beta_1 + 1 = 1$, откуда следует, что $\beta_1 = 0$. Мы пришли к единственной модели — квазиевклидовой. При этом $R = 6/a^2$; $R_1^1 = 2/a^2$; $R_0^0 = 0$; $p^* = -1/\kappa_0 a^2$; $\varepsilon^* = 3/\kappa_0 a^2$; $3p^* + \varepsilon^* = 0$, т. е. получено уравнение состояния Эйнштейна, как для стационарной Вселенной.

В сопутствующей системе отсчета компоненты θ_k^i имеют значения:

$$\theta_0^0 = \sqrt{R_0/R} \cdot 9\alpha/\kappa_0 a^2 = 9\alpha a_0/\kappa_0 a^3;$$

$$\theta_1^1 = \theta_2^2 = \theta_3^3 = -\sqrt{\frac{R}{R_0}} \frac{9\alpha(2\alpha-1)\alpha_0}{\kappa_0 a^2} = -\frac{3\alpha(2\alpha-1)a_0}{\kappa_0 a^3};$$

$$\theta = -\sqrt{\frac{R}{R_0}} \frac{18\alpha(\alpha-1)}{\kappa_0 a^2} = -\frac{18\alpha(\alpha-1)a_0}{\kappa_0 a^3},$$

или

$$\sqrt{R_0/R} \theta_0^0 = -9\alpha p^*; \quad \sqrt{R_0/R} \theta_1^1 = 3\alpha(2\alpha-1)p^*; \quad \sqrt{R_0/R} \theta = 18\alpha(\alpha-1)p^*.$$

Далее находим

$$\sqrt{R_0/R} \bar{T}_1^1 = (1/2) (3T_1^{*1} - T^*/2) = (1/4) (5p^* + \varepsilon^*) = 0;$$

$$\sqrt{R_0/R} \bar{T}_0^0 = (1/2) (3T_0^{*0} - T^*/2) = -(1/4) (\varepsilon^* + 3p^*) = -\varepsilon^* = \sqrt{R_0/R} \bar{T}.$$

Таким образом, имеем $\sqrt{R_0/R} \bar{\varepsilon} = \varepsilon^* = -3p^*$; $\bar{p} = 0$. Поскольку $\bar{T}_i^k = T_i^{0k} + \theta_i^k$, запишем

$$\sqrt{R_0/R} T_0^{00} = (\bar{T}_0^0 - \theta_0^0) \sqrt{R_0/R} = -\varepsilon^* + 9\alpha p^* = -\varepsilon^0 \sqrt{R_0/R};$$

$$\sqrt{R_0/R} \varepsilon^0 = \varepsilon^* - 9\alpha p^* = -3p^* (1/2 + 3\alpha).$$

Отсюда также следует, что если $\varepsilon^* + 3p^* = 0$, то

$$\sqrt{R_0/R} T_1^{01} = (\bar{T}_1^1 - \theta_1^1) \sqrt{R_0/R} = -3\alpha(2\alpha-1)p^* = \sqrt{R_0/R} p^0.$$

Если $\alpha = 0$, то

$$\theta_i^k = 0; \quad \varepsilon^0 \sqrt{R_0/R} = \varepsilon^*/2; \quad \sqrt{R_0/R} p^0 = 0.$$

Тогда

$$\sqrt{R_0/R} p_M^0 = \sqrt{R_0/R} (T^0 + \theta) = \sqrt{R_0/R} \bar{T} = (3p^* - \varepsilon^*)/2 = 3p^* = -\varepsilon^*.$$

Перейдем от сопутствующей к центрально-симметричной системе отсчета, т. е. от интервала

$$-ds^2 = -c d\tau^2 + a^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2)$$

к интервалу

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 \exp \nu + \exp \lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

где $a = ct$; $r = a\chi = ct\chi$. Соотношения для перехода выведены в [24]. Они имеют вид:

$$\exp \lambda = \frac{1}{1-\chi^2}; \quad \exp \nu = \frac{\exp(-\chi^2)}{1-\chi^2}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\dot{a}}{c} \quad \chi = \chi;$$

$$ct = ct \exp \frac{\chi^2}{2} = \frac{r}{\chi} \exp \frac{\chi^2}{2}.$$

Таким образом,

$$-ds^2 = (1-\chi^2)^{-1} [-c^2 dt^2 \exp(-\chi^2) + dr^2] + r^2 d\Omega^2. \quad (9.29)$$

Поскольку $dct = \exp(\chi^2/2) [dr/\chi - (r d\chi/\chi^2)(1-\chi^2)]$, уравнение (9.29) можно написать в виде

$$-ds^2 = \frac{2}{\chi^2} \left[\frac{2r dr d\chi}{\chi^3} - \left(dr^2 + \frac{r^2}{\chi^4} (1-\chi^2) d\chi^2 \right) \right] + r^2 d\Omega^2.$$

Делая замену $dr = [dct\chi + ct d\chi(1-\chi^2)] \exp(-\chi^2/2)$, можно (9.29) представить как

$$-\exp(-\chi^2) ds^2 = [-c^2 dt^2 + c^2 t^2 (1-\chi^2) d\chi^2 + 2 c dt d\chi \chi ct] + c^2 t^2 \chi^2 d\Omega^2.$$

9.4. УРАВНЕНИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО И ЛОКАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

Очевидно, что действие метагалактического и локального гравитационных полей

$$S^* = S + S_{\text{л}},$$

где

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d\Omega = \int V \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa_0} + p^0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta-\alpha} \right] \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\alpha} d\Omega \quad (9.30)$$

— действие поля Метагалактики;

$$S_{\text{л}} = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_{\text{л}} d\Omega = \frac{1}{c} \int V \sqrt{-g} \left[\left(\frac{R}{R_0} \right)^{\alpha} \frac{R_{\text{л}}}{2\kappa_0} + \Psi \left(\frac{R}{R_0} \right) p_{\text{л}} \right] d\Omega \quad (9.31)$$

— действие локального поля; здесь $\Psi = \Psi(R/R_0) \approx [1 + \text{малые члены, связанные с } R/R_0]$. Избыточное действие локального поля есть $S^* - S$.

Ниже будут более тщательно обоснованы эти соотношения; пока лишь укажем, что (9.31) написано с учетом масштабной инвариантности по аналогии с (9.30); функция Ψ учитывает переменное поле Вселенной.

Вычислим вариации обоих лагранжианов:

$$2\kappa_0 \delta \mathcal{L} = V \sqrt{-g} (R/R_0)^{\alpha} \delta g^{ik} [f R_{ik} - (1/2) g_{ik} R - \kappa_0 (R/R_0)^{\beta-\alpha} T_{ik}^0] + \\ + V \sqrt{-g} (R/R_0)^{\alpha} f g^{ik} \delta R_{ik};$$

$$2\kappa_0 \delta \mathcal{L}_{\text{л}} = V \sqrt{-g_{\text{л}}} (R/R_0)^{\alpha} \delta g_{\text{л}}^{ik} [R_{\text{л}ik} - (1/2) g_{\text{л}ik} R_{\text{л}} - \kappa_0 \varphi T_{\text{л}ik}] + \\ + V \sqrt{-g_{\text{л}}} (R/R_0)^{\alpha} g_{\text{л}}^{ik} \delta R_{\text{л}ik} + V \sqrt{g_{\text{л}}/g} (V \sqrt{-g} \delta g^{ik} f_1 R_{ik} +$$

$$+ V \sqrt{-g} g^{ik} f_1 \delta R_{ik}),$$

где

$$f = f(R) = 1 + \alpha + (2\kappa_0 \beta / R) p^0 (R/R_0)^{\beta - \alpha};$$

$$f_1 = f_1(R, R_{\perp}) = (\alpha R_{\perp} / R) (R/R_0)^{\alpha} + 2\kappa_0 R_{\perp} \Psi'; \quad \Psi' = d\Psi/dR.$$

Отсюда

$$2\kappa_0 \delta(\mathcal{L}^* - \Delta L) = V \sqrt{-g} \delta g^{ik} \{[(R/R_0)^{\alpha} f + V \sqrt{g_{\perp}/g} f_1] R_{ik} -$$

$$- (R/R_0)^{\alpha} (R/2) g_{ik} - \kappa_0 (R/R_0)^{\beta} T_{ik}^0\} + V \sqrt{-g} g^{ik} \delta R_{ik} [(R/R_0)^{\alpha} f +$$

$$+ V \sqrt{g_{\perp}/g} f_1] + V \sqrt{-g_{\perp}} \delta g_{\perp} \{(R/R_0)^{\alpha} [R_{\perp ik} - (1/2) g_{\perp ik} R_{\perp}] -$$

$$- \kappa_0 \Psi T_{\perp ik}\} + V \sqrt{-g_{\perp}} (R/R_0)^{\alpha} g_{\perp}^{ik} \delta R_{\perp ik},$$

или

$$2\kappa_0 \delta(\mathcal{L}^* - \Delta L) = V \sqrt{-g} \delta g^{ik} [f^* R_{ik} - (R/2) g_{ik} - \kappa_0 (R/R_0)^{\beta - \alpha} T_{ik}^0] \times$$

$$\times (R/R_0)^{\alpha} + V \sqrt{-g} g^{ik} \delta R_{ik} (R/R_0)^{\alpha} f^* + V \sqrt{-g_{\perp}} \delta g_{\perp}^{ik} (R/R_0)^{\alpha} [R_{\perp ik} -$$

$$- (1/2) g_{\perp ik} R_{\perp} - \kappa_0 f (R/R_0)^{-\alpha} T_{\perp ik}] + V \sqrt{-g_{\perp}} (R/R_0)^{\alpha} g_{\perp}^{ik} \delta R_{\perp ik},$$

где $f^* = f + V \sqrt{g_{\perp}/g} (R/R_0)^{-\alpha} f_1 = 1 + \alpha + (2\kappa_0 \beta / R) p^0 (R/R_0)^{\beta - \alpha} +$

$$+ V \sqrt{g_{\perp}/g} (\alpha R_{\perp} / R + 2\kappa_0 p_{\perp} (R/R_0)^{-\alpha} \Psi').$$

Поскольку

$$\Psi V \sqrt{-g} g^{lm} \frac{\delta R_{lm}}{\delta g^{ik}} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^l} C_{ik}^l + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^l \partial x^m} C_{ik}^{lm}$$

(здесь

$$C_{ik}^l = \partial C_{ik}^{lm} / \partial x^m - D_{ik}^l = V \sqrt{-g} \left[(1/2) g^{ml} (g_{is} \Gamma_{km}^s - g_{ks} \Gamma_{im}^s) + \right.$$

$$\left. + (\Gamma_{ik}^l - g_{ik} g^{sm} \Gamma_{sm}^l) \right];$$

$$C_{ik}^{lm} = V \sqrt{-g} (g^{lm} g_{ik} - \delta_i^m \delta_k^l);$$

$$\left. \right\} (9.32)$$

Ψ — любая функция любых параметров), то, варьируя действие S по g^{ik} и $g_{\perp}^{ik}$ и используя уравнения Лагранжа с учетом вторых производных

$$\frac{\partial L}{\partial q^{(r)}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial L}{\partial q_l^{(r)}} + \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial L}{\partial q_{lm}^{(r)}} = 0,$$

где $q^{(r)}$ есть g^{ik} или $g_{\perp}^{ik}$; $q_l = \partial q / \partial x^l$; $q_{lm} = \partial^2 q / \partial x^l \partial x^m$, приходим к двум полевым уравнениям: одно из них описывает метagalактическое поле с учетом локального, а другое — локальное поле с учетом метagalактического. Эти уравнения имеют вид:

$$(R/R_0)^{\alpha} [f^* R_{ik} - (R/2) g_{ik} - \kappa_0 (R/R_0)^{\beta - \alpha} T_{ik}^0] + \alpha_{ik}^l \frac{\partial [f^* (R/R_0)^{\alpha}]}{\partial x^l} +$$

$$+ \alpha_{ik}^{lm} \frac{\partial^2 [f^* (R/R_0)^\alpha]}{\partial x^l \partial x^m} = 0; \quad (9.33)$$

$$(R/R_0)^\alpha [R_{\pi ik} - (R_\pi/2) g_{\pi ik} - \kappa_0 \Psi (R/R_0)^{-\alpha} T_{\pi ik}] + \\ + \alpha_{\pi ik}^l \frac{\partial (R/R_0)^\alpha}{\partial x^l} + \alpha_{\pi ik}^{lm} \frac{\partial^2 (R/R_0)^\alpha}{\partial x^l \partial x^m} = 0, \quad (9.34)$$

где

$$\alpha_{ik}^l = \frac{C_{ik}^l}{\sqrt{-g}}; \quad \alpha_{ik}^{lm} = \frac{C_{ik}^{lm}}{\sqrt{-g}}; \quad \alpha_{\pi ik}^l = \frac{C_{\pi ik}^l}{\sqrt{-g_\pi}}; \quad \alpha_{\pi ik}^{lm} = \frac{C_{\pi ik}^{lm}}{\sqrt{-g_\pi}}.$$

Выражения для $C_{\pi ik}^l$ и $C_{\pi ik}^{lm}$ определяются из (9.32) подстановкой $g_{\pi ik}$ и $\Gamma_{\pi ik}^l$ вместо g_{ik} и Γ_{ik}^l .

Окончательно систему уравнений (9.33), (9.34) удобно написать в виде

$$R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa_0 (R/R_0)^{\beta-\alpha} (T_i^{0k} + \theta_i^k) + (1 - f^*) R_{ik} = \kappa_0 T_i^{*k}; \quad (9.35)$$

$$R_{\pi i}^k - (1/2) \delta_i^k R_\pi = \kappa_0 (R/R_0)^{-\alpha} \Psi (T_{\pi i}^k + \theta_{\pi i}^k) = \kappa_0 T_{\pi i}^{*k}. \quad (9.36)$$

Здесь

$$\kappa_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\beta \theta_i^k = \alpha_i^{kl} \frac{\partial [f^* (R/R_0)^\alpha]}{\partial x^l} + \alpha_i^{klm} \frac{\partial^2 [f^* (R/R_0)^\alpha]}{\partial x^l \partial x^m};$$

$$\alpha_i^{kl} = g^{kr} \alpha_{ir}^l; \quad \alpha_i^{klm} = g^{kr} \alpha_{ir}^{lm};$$

$$T_i^{0k} = -2 (\partial \Delta L / \partial g^{ir}) g^{kr};$$

$$\kappa_0 \Psi \theta_{\pi i}^k = \alpha_{\pi i}^{kl} \frac{\partial (R/R_0)^\alpha}{\partial x^l} + \alpha_{\pi i}^{klm} \frac{\partial^2 (R/R_0)^\alpha}{\partial x^l \partial x^m};$$

$$\alpha_{\pi i}^{kl} = g_\pi^{kr} \alpha_{\pi ir}^l; \quad \alpha_{\pi i}^{klm} = g_\pi^{kr} \alpha_{\pi ir}^{lm};$$

$$T_{\pi i}^k = 2 (\partial \Delta L / \partial g_\pi^{ir}) g_\pi^{kr}.$$

Используя законы масштабной инвариантности, можно положить $\alpha = 0$. Тогда система уравнений (9.35), (9.36) существенно упростится. Так как

$$f = 1 + (2\kappa_0 \beta / R) p^0 (R/R_0)^\beta; \quad f_1 = 2\kappa_0 p_\pi \Psi';$$

$$f^* = 1 + \frac{2\kappa_0 \beta}{R} p^0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\beta + 2\kappa_0 \sqrt{\frac{g_\pi}{g}} p_\pi \Psi';$$

$$\kappa_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\beta \theta_i^k = \alpha_i^{kl} \frac{\partial f^*}{\partial x^l} + \alpha_i^{klm} \frac{\partial^2 f^*}{\partial x^l \partial x^m}; \quad \theta_{\pi i}^k = 0,$$

имеем

$$R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa_0 (R/R_0)^\beta (T_i^{0k} + \theta_i^k) + (1 - f^*) R_i^k = \kappa_0 T_i^{*k}; \quad (9.37)$$

$$R_{\pi i}^k - (1/2) \delta_i^k R_\pi = \kappa_0 \Psi T_{\pi i}^k = \kappa_0 T_{\pi i}^{*k}. \quad (9.38)$$

Свернем уравнения (9.37) и (9.38), тогда

$$R = [\kappa_0/(-f+2)] (R/R_0)^\beta (T^0 + \theta) = \kappa_0 T^*/(-f+2);$$

$$-R_{\text{л}} = \kappa_0 \Psi T_{\text{л}} + \kappa_0 \Delta T_{\text{л}} = \kappa_0 T_{\text{л}}^*.$$

При этом

$$f^* = 1 - \frac{2\beta p^0 (-f+2)}{T^0 + \theta} - 2 \sqrt{\frac{g_{\text{л}}}{g}} \frac{p_{\text{л}}}{p^0} \frac{p^0 (-f+2)}{T^0 + \theta} \frac{d\Psi}{d \ln R},$$

или

$$f^* = 1 - \frac{2p^0 (-f+2)}{T^0 + \theta_{\text{л}}} \left(\beta + \sqrt{\frac{g_{\text{л}}}{g}} \frac{p_{\text{л}}}{p^0} \frac{d\Psi}{d \ln R} \right) =$$

$$= 1 - \frac{2\beta p^0 (-f+2)}{T^0 + \theta} - \frac{2 - (-f+2) p_{\text{л}}}{T_0 + \theta} \sqrt{\frac{g_{\text{л}}}{g}} \frac{d\Psi}{d \ln R}.$$

Как уже говорилось в § 9.3, для различных значений α получают-ся разные значения θ_i^k , но смысл полного тензора энергии-импульса всей материи, включая гравитационное поле, имеет сумма $T_i^{*k} + \theta_i^k = \bar{T}_i^k$. Таким образом, удобно (9.35), (9.36), или, что то же, (9.37) и (9.38), записать в виде

$$R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa_0 (R/R_0)^\beta \bar{T}_i^k + (1-f^*) R_i^k = \kappa_0 \bar{T}_i^{*k};$$

$$R_{\text{л}i}^k - (1/2) \delta_i^k R_{\text{л}} + \kappa_0 \Psi \bar{T}_{\text{л}i}^k = \kappa_0 T_{\text{л}i}^{*k},$$

где

$$\bar{T}_i^{*k} = T_i^{0k} + \theta_i^k; \bar{T}_{\text{л}i}^k = T_{\text{л}i}^k = \theta_{\text{л}i}^k.$$

Для внешнего локального поля, когда $p_{\text{л}} = 0$; $R_{\text{л}} = 0$ и $R_{\text{л}i k} = 0$, получаем обычное уравнение Эйнштейна. Поскольку $\Delta T_i^{00} = 0$; $f^* = 1 + (2\kappa_0 \beta / R) p^0 (R/R_0)^\beta = \text{const}$, уравнение (9.39) принимает вид:

$$R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa_0 (R/R_0)^\beta \bar{T}_i^k + (1-f^*) R_i^k = \kappa_0 T_i^{*k},$$

т. е. мы приходим к масштабнo-инвариантному уравнению метagalак-тического поля, причем $\beta = -1/2$.

Для внутреннего локального поля, используя уравнение для $\beta = 0$ и полагая сначала для простоты $\Psi = \text{const} = 1$, имеем

$$R_i^k - (1/2) \delta_i^k R = \kappa_0 T \sqrt{R_0/R} T_i^{0k} + (1-f) R_i^k;$$

$$R_{\text{л}i}^k - (1/2) \delta_i^k R_{\text{л}} = \kappa_0 T_{\text{л}i}^k,$$

где $f = \text{const}$. В этом приближении для локального избыточного поля мы получили уравнение Эйнштейна.

Поскольку $[\bar{R}_i^k - (1/2) \delta_i^k \bar{R}]_{;k}(\bar{g}) = 0$, имеем $\bar{T}_{i;k}(\bar{g}) = 0$, при-чем здесь дифференцированию подлежат компоненты $\bar{g}_{ik}$.

Распишем подробнее последнее равенство. Учтем, что

$$\bar{T}_{i;k}^{*k}(\bar{g}) = -T_{li;k}^{*k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-\bar{g}}}{\partial x^k} T_i^{*k} + \frac{\partial T_i^{*k}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial x^l} T^{*ml},$$

сделаем простые преобразования и найдем:

$$-T_{li;k}^{*k} = \frac{\partial T_i^{*k}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial x^k} (\bar{g}^{ml} T_i^{*k} - \delta_i^k T^{*ml}).$$

Однако

$$\frac{\partial T_i^{*k}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} (g^{ml} T_i^{*k} - \delta_i^k T^{*ml}) = T_{i;k}^{0k}(\bar{g}) = 0,$$

следовательно,

$$T_{li;k}^{*k} = \frac{1}{2} \left[-T_i^{*k} \frac{\partial \ln \frac{\bar{g}}{g}}{\partial x^k} + T^{*ml} \frac{\partial (\bar{g}_{lm} - g_{lm})}{\partial x^l} \right] = f_i^*.$$

Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае всегда есть плотность потока локальной энергии f_i^* . Если $\bar{g}_{ik} = g_{ik}$, то $f_i^* = 0$. Тогда уравнения поля переходят в уравнения поля для Вселенной, которые масштабно-инвариантны. Наличие локального поля нарушает масштабно-инвариантную группу, поскольку уравнения локального поля масштабно-неинвариантны.

Остановимся теперь кратко на вопросе, как «складывать» метагалактическое и локальное поля. Очевидно, что складывать в римановом пространстве можно только скаляры, т. е. в данном случае действия и лагранжианы соответствующих полей

$$S = S_M + S_L; L = L_M + L_L.$$

Можно, разумеется, также образовать различные комбинации сумм из этих величин, например скаляр $A_{CK} = S_M + \lambda L_L$, где $\lambda = \text{const}$.

Энергия и плотность энергии локального поля больше соответствующих величин для поля Метагалактики, поэтому общее уравнение, объединяющее локальное поле и поле Метагалактики, можно написать в стандартном эйнштейновском виде

$$\bar{R}_i^k - (1/2) \delta_i^k \bar{R} = \kappa_0 \bar{T}_i^k,$$

где тензор энергии-импульса

$$\bar{T}_i^k = \sqrt{R_0/R} (T_i^{0k}) (1-f) \frac{R_i^k}{\kappa_0} + T_{li}^k + T_{li}^{*k} + T_i^{*k}.$$

Если локальное поле отсутствует, то $f = \beta/2$; $\beta = \alpha - 1/2$; если $r_L \gg r_M$, то $f \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 0$.

В заключение уточним смысл тензора энергии-импульса. Сделаем это не отдельно для метагалактического и локального полей, а сразу для суммарного поля. Напишем, что $p_M^0 = p_M + p_g$, где p_M — ла-

гранжиан только материи; p_g — лагранжиан гравитационного поля. В этом случае необходимо дополнительно проварьировать плотность действия

$$S_g = \int \sqrt{-g} p_g \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta_1} d\Omega = \int \sqrt{-g} p_g \Psi \left(\frac{R}{R_0} \right) d\Omega,$$

где для метагалактического поля $\beta_1 = \beta$, для локального $\beta_1 \rightarrow 1 +$ + малые члены от R/R_0 (здесь g_{ik} можно брать для суммарного поля). Очевидно, что поскольку

$$\delta S_g = \int \beta_1 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta_1} \sqrt{-g} \frac{p_g}{R} \delta R d\Omega + \int \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta_1} \delta (\sqrt{-g} p_g) d\Omega$$

и член $\beta_1 \sqrt{-g} (\delta R/R) p_g (R/R_0)^{\beta_1}$ входит в вариацию $\delta (\sqrt{-g} p_M^0 \times \times (R/R_0)^{\beta_1})$, в соответствующих местах надо заменить p_M^0 суммой $p_M + p_g$.

К тензору энергии-импульса материи T_{ik}^0 надо добавить

$$T_{gik}^0 = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta_1} \frac{\delta (\sqrt{-g} p_g)}{\delta g^{ik}} = - \frac{2\delta S_g}{\sqrt{-g} \delta g^{ik}} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta_1}.$$

Выберем p_g в виде $p_g = A_0 \bar{R}^{2\gamma}$, где $\bar{R}^2 = R_{klm}^i R_i^{klm}$. Тогда, как легко показать,

$$\delta \bar{R}^2 = 2 R_{ilam} R_k^{alm} \delta g^{ik} + 2 R_r^{nlm} \delta R_{nlm}^r,$$

откуда

$$\begin{aligned} (R/R_0)^{\beta_1} \delta (\sqrt{-g} p_g) &= A_0 \delta (\sqrt{-g} \bar{R}^{2\gamma}) (R/R_0)^{\beta_1} = \\ &= \sqrt{-g} A_0 (R/R_0)^{\beta_1} [-(\bar{R}^{2\gamma}/2) g_{ik} + 2\gamma \bar{R}^{2(\gamma-1)} R_{ilam} R_k^{alm}] \delta g^{ik} + \\ &+ \sqrt{-g} 2\gamma (R/R_0)^{\beta_1} R_r^{nlm} (\delta R_{nlm}^r / \delta g^{ik}) \delta g^{ik}, \end{aligned}$$

где надо вычислить вариационную производную от последнего слагаемого. Запишем:

$$2\gamma \bar{R}^{2(\gamma-1)} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\beta_1} \sqrt{-g} R_r^{nlm} \frac{\delta R_{nlm}^r}{\delta g^{ik}} = \bar{f} \sqrt{-g} R_r^{nlm} \frac{\delta R_{nlm}^r}{\delta g^{ik}},$$

где $\bar{f} = 2\gamma \bar{R}^{2(\gamma-1)} (R/R_0)^{\beta_1}$, и

$$\sqrt{-g} R_r^{nlm} \delta R_{nlm}^r = \bar{A}_{ik} \delta g^{ik} + \bar{A}_{ik}^l \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \bar{A}_{ik}^{lm} \delta \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

Подставим выражение

$$\bar{f} \left(\bar{A}_{ik} \delta g^{ik} + \bar{A}_{ik}^l \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \bar{A}_{ik}^{lm} \delta \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^m} \right)$$

в уравнение Лагранжа. Найдем, что

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \bar{f} R_r^{nlm} \delta R_{nlm}^r / \delta g^{ik} &= \bar{f} \bar{A}_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l} (\bar{f} \bar{A}_{ik}^l) + \\ &+ (\partial^2 / \partial x^l \partial x^m) (\bar{f} \bar{A}_{ik}^{lm}) = (R/R_0)^{\beta_1} \Omega_{ik}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$(R/R_0)^{\beta_1} \delta (V \sqrt{-g} p_g) = V \sqrt{-g} A_0 (R/R_0)^{\beta_1} [-(\bar{R}^{2\gamma}/2) g_{ik} + \\ + 2\gamma \bar{R}^{2(\gamma-1)} R_{inlm} R_k^{nlm} + \Omega_{ik}] \delta g^{ik},$$

откуда следует, что к тензору энергии-импульса материи T_{ik}^0 надо добавить

$$T_{gik} = (R/R_0)^{\beta_1} A_0 [(2\gamma/R^2) R_{ilam} R_k^{alm} - g_{ik}/2] \bar{R}^{2\gamma} + (R/R_0)^{\beta_1} \Omega_{ik}.$$

Полученное выражение часто используется в левой части уравнений гравитационного поля (так называемая максвеллизация уравнений теории гравитации). Довольно очевидно, что если обозначить

$$T_{oik} + (R/R_0)^{\beta_1} \Omega_{ik} = T_{\bar{o}ik}; \quad T_{\bar{g}ik} = (R/R_0)^{\beta_1} [(2\gamma R_{ilam}/\bar{R}^2) R_k^{alm} - \\ - g_{ik}/2] \bar{R}^{2\gamma},$$

то можно $T_{oik} + T_{gik}$ написать в виде $T_{\bar{o}ik} + T_{\bar{g}ik}$. При этом в принципе можно положить $\Omega_{ik} = 0$, поскольку этот член входит в T_{gik} . В самом деле, всегда можно (по Палатини и Н. В. Мицкевичу [69]) показать, что $V \sqrt{-g} R_r^{nlm} \delta R_{nlm}^r = 0$, если считать, что Γ_{ik}^l и $\partial \Gamma_{ik}^l / \partial x^l$ не варьируются.

Итак, окончательно будем писать вместо p^0 сумму: $p^0 = p_m + p_g$, вместо T_{ik}^0 — выражение

$$T_{ik}^0 + A_{oik} + [(2\gamma/\bar{R}^2) \bar{R}_{ialm} R_k^{alm} - g_{ik}] \bar{R}^{2\gamma},$$

что не изменяет уравнения по форме. Для локального поля надо использовать $R_{\pi iklm}$. Подчеркнем, что главный результат таков: анализируя уравнения суммарного поля, можно показать, что интенсивность любого гравитационного сигнала, идущего от более слабого поля к более сильному, увеличивается.

9.5. К ВОПРОСУ О ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ ГРАВИТАЦИИ

ОТО не претендует на объяснение происхождения гравитационных сил, действующих между частицами материи, она лишь связывает метрику (геометрию) пространства-времени с наличием в нем материи. Одним из важных выводов ОТО явилось предсказание конечной скорости распространения гравитационных волн; было показано, что эта скорость равна скорости света в вакууме.

ОТО можно назвать теорией гравитации в большой Вселенной. Эффекты, обнаруженные этой теорией, которая обобщает теорию тяготения Ньютона, проявляются тем сильнее, чем больший объем пространства подвергнут изучению. В [1] сделана попытка выяснить природу сил гравитации при допущении, что гравитационное поле возникает вследствие своеобразных пульсаций, при которых различные частицы могут отдавать часть своей энергии во внешнее пространство.

В качестве модели использовалась сплошная среда в пренебрежении диссипативными процессами и кривизной пространства, что для частиц вполне допустимо.

Было показано, что сила взаимодействия меняется обратно пропорционально квадрату расстояния между телами:

$$F = GM_1M_2/R^2.$$

Здесь $G = \theta\alpha^2/24\pi\rho_{02}$, где $\theta = (4/3)(\rho_{02}/\rho_{01})^{1/2}$; α — коэффициент расхода массы; ρ_0 — начальная плотность истекающих газов; R — расстояние между массами.

При $\alpha = \text{const}$ [1]

$$M_1/r_{0,1}^2 = M_2/r_{0,2}^2 = \text{const},$$

где r_0 — начальные размеры взаимодействующих масс.

Таким образом, и в гидродинамической модели получена массовая формула (6.32).

Возьмем формулу для α [1]: $\alpha = 6GM/\theta cr_0^2$ и применим ее ко всей Вселенной, считая, что $r_0 = a$. Тогда нетрудно убедиться, что α по порядку величины совпадает с постоянной Хаббла:

$$\alpha \approx H = c/a = 6GM/ca^2.$$

Отсюда $G \approx c^2a/6M \sim 10^{-7}$ (в системе СГС). Эта же формула в применении к нуклонам дает константу так называемой сильной гравитации G_c (в системе СГС):

$$G_c = c^2\lambda/6m \sim 10^{33}.$$

Поскольку $M/a^2 = m/\lambda^2$,

$$G_c = Ga/\lambda \approx 10^{40} G = \sqrt{N}G, \quad G = G_c/\sqrt{N},$$

где N — число нуклонов во Вселенной.

При этом

$$\alpha_c = c/\lambda, \quad \alpha = \alpha_c/\sqrt{N},$$

т. е. соотношения между G и G_c , α и α_c имеют характер флуктуаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные аспекты модельного исследования систем на стыке гравитации и физики микромира, конечно, охватывают лишь часть этой большой проблемы. Весьма интересные результаты, не рассмотренные нами, можно найти в следующих работах: [176], в которой высказана идея об альтернативном объяснении ГБЧ Дирака, использующая аналогию с инстантонами; [177], в которой развивается иерархическая модель реального мира на основе праспиноров и т. п.; [178], в которой выдвинута модель «инфляционной» Вселенной, учитывающая фазовые переходы и генерацию энтропии, и [179]. Наконец, новые идеи, связанные с проблемой фундаментальных констант, изложены в [180].

Итак, в предыдущих главах были изложены основные результаты наших исследований в области связи теории гравитации и физики микромира на основе точно решаемых модельных систем полей [181]. Этот подход оказался весьма эффективным в применении к проблемам космологии, коллапса и элементарных частиц.

Исследовались классические гравитационные и другие физические поля как источники уравнений Эйнштейна. Далее, в рамках квантовой космологии были изучены квантовые материальные и простейшие типы гравитационного поля, а именно космологические. На следующем этапе рассчитаны квантовые эффекты материи и проанализировано их обратное влияние на гравитационное поле.

Наиболее интересными результатами этих исследований на первом этапе были частицеподобные решения с учетом гравитации, в которых показана регуляризирующая роль гравитационного поля [91]. Впервые удалось построить полностью регулярную полевую модель частицы на основе взаимодействия скалярного, электромагнитного и гравитационного полей [92]. В дальнейшем были найдены обобщения этого решения [182], получен класс несингулярных полевых решений.

В области квантования космологических моделей следует отметить полученные впервые данные о нулевой вероятности сингулярного состояния в закрытой фридмановской модели Вселенной, заполненной скалярным полем [8]. Из последних исследований по квантованию открытой фридмановской модели с λ -членом [183] отметим результат о наличии дискретного спектра и отрицательных уровней энергии материи — эффект, аналогичный эффекту нарушения симметрии в гравитационном поле.

В последнее время появилось множество «сценариев» эволюции Вселенной. Подчеркнем, что, возможно, первым таким вариантом была космологическая гипотеза 1972 г. [24], в которой прослеживались ос-

новые черты современных вариантов. Это начало эволюции из несингулярного состояния (в частности, из одного планкеона), рождение наблюдаемой материи из гравитационного вакуума — совокупности планкеонов, возбуждаемых внешним метagalактическим фоном. В этом варианте материя рождается не сразу, а постепенно в течение всего расширения. При этом расширение идет по линейному закону и предпочтительной является квазиевклидова модель. Более того, выполняются так называемые соотношения Маха и Дирака для Метagalактики:

$$2GM/c^2 a = \hbar/cm_\pi \lambda_\pi = L^2 a/\lambda_\pi^3 = 1.$$

Эта гипотеза перебрасывает мосты к объединению всех взаимодействий. Получаются соотношения между параметрами основных элементарных частиц и константами макромира. Если раньше массы всегда были чисто эмпирическими параметрами, то теперь мы в состоянии с достаточной точностью их вычислить:

$$m_n = (L^2 a)^{-1/3}; \quad m_e = \alpha^{2/3} L^{-2/3} a^{-1/3}; \\ m_\nu = G_F/2Ga \quad (c = \hbar = 1).$$

Вычисляются также и константы различных взаимодействий:

$$\alpha^{-1} = \ln(a/L); \quad G_F/\hbar c = L^{3/2} a^{1/3}; \quad G = G_0 a_0/a.$$

Теория гравитационного вакуума предсказывает также возможность распространения звуковых волн со скоростью, значительно превышающей скорость света. Если бы гравитационный вакуум был несжимаем, то скорость передачи звуковых сигналов в нем была бы бесконечно велика. Вследствие того что на планкеоны воздействует внешнее поле Метagalактики и они излучают, среду из планкеонов можно считать хотя и очень слабо, но сжимаемой. Изменение плотности планкеона вследствие флуктуаций $\Delta\rho/\rho = 1/\sqrt{N} = (L/a)^{3/2} \sim 10^{-90}$, где $N = (a/L)^3$; квадрат скорости звука

$$\omega^2/c^2 = \Delta p/\Delta\rho = p_L \sqrt{N}/\rho = c^2 \sqrt{N}.$$

Отсюда $\omega/c = N^{1/4} = (a/L)^{3/4}$. В настоящий момент при $a = 10^{28}$ см $\omega \approx 10^{55}$ см/с и звук будет проходить всю Метagalактику за $\tau = a/\omega = L^{3/4} a^{1/4}/c$, т. е. в нашу эпоху за 10^{-27} с. Эта гипотеза объясняет достаточно раннюю полную изотропизацию и однородность наблюдаемой Вселенной.

Следующий сценарий был предложен в 1979 г. в работе [52]. В его основе также лежит вакуумная модель, но в ней используются популярные в современной квантовой теории поля эффекты нарушения симметрии, правда, с учетом гравитационного поля. Первый этап включает спонтанное нарушение конформной симметрии единых теорий типа Вайнберга—Салама на гравитационном фоне, в предположении, что ненулевыми вакуумными средними обладают лишь конформное хиггсовское и гравитационное поля. Как впервые отмечено Домокошем в 1976 г. [135], этот эффект приводит к решениям де Ситтера в начальной фазе и (см. [52]) одновременно к теории гравитации, которая описывается эйнштейновским лагранжианом с гравитационной

константой, выражающейся через планковские параметры. В дальнейшем деситтеровская стадия была использована в других сценариях, учитывающих однопетлевые квадратичные по кривизне поправки в тензоре энергии-импульса (В. М. Николаенко, 1977 г.; В. Ц. Гурович, А. А. Старобинский, 1981 г.).

Следующий этап сценария [52] включает эффект нарушения калибровочной симметрии конформного хиггсовского поля в гравитационном поле и основан на полученном впервые в 1978 г. несингулярном (вследствие квантовых свойств вакуума) космологическом решении [52, 129]. Весьма существенный результат получен при рассмотрении этого эффекта в комбинации с макроматерией: было показано, что несингулярное решение сохраняется только при очень малом значении константы самодействия хиггсовского поля ($\lambda \sim 10^{-120}$). Если мы твердо полагаем, что сингулярных решений быть не должно, то данный результат свидетельствует о том, что эволюция Вселенной начинается из чисто вакуумного состояния, а материя в виде частиц появляется на более поздних этапах как следствие, например, рождения пар частиц в нестационарном гравитационном поле. Аналогичный вывод сделан в 1982 г. В. М. Мостепаненко на основе учета макроматерии и квадратичных поправок вследствие поляризации вакуума.

Наконец, третий этап нашего сценария [52] включает рождение частиц в нестационарном гравитационном поле и объяснение наблюдаемой сейчас массы за счет этого процесса [126, 140] — как с использованием ГБЧ Дирака, так и в стандартном подходе. Здесь также получено деситтеровское решение.

В разработке проблемы вариаций констант, как отмечено в гл. 2, в последние годы достигнут большой прогресс. Прежде всего, в наших работах [3, 22] и в работах ряда зарубежных авторов предложена концепция о том, что вариации безразмерных констант не носят абсолютного характера, а зависят от способа измерения — использования эталонов, систем единиц и приборов, принцип действия которых основан на определенном типе взаимодействия.

В настоящее время нет единой теории всех четырех известных типов взаимодействия. Есть теория электрослабых взаимодействий и отдельные модели с учетом сильных. Гравитационные взаимодействия можно подключать лишь на классическом уровне, когда в правую часть уравнений Эйнштейна вводят тензор энергии-импульса других полей и их взаимодействие. Поэтому современные высокоточные измерения строятся на каком-то отдельном типе взаимодействия, например электромагнитном, — на основе наиболее полно разработанной квантовой электродинамики. В принципе можно определить эталоны, ввести систему единиц, связанную с другими взаимодействиями, например с гравитационным. При этом возникают разные эталоны, основанные на динамике данного взаимодействия, например атомный эталон времени-частоты — атомная (электродинамическая) секунда, определяемая по частоте перехода в атоме Cs, и гравитационная секунда, вычисляемая по периоду движения Земли вокруг Солнца (эфемеридное время). Ниоткуда не следует, что эти единицы, определенные через раз-

личные взаимодействия, а потому и через характерные для них константы, синхронизованы во времени и пространстве. Поэтому возникает принципиальная возможность их рассогласования и эволюции относительно друг друга, в частности, с темпом, задаваемым эволюцией всей Вселенной. Вот почему при измерениях в атомной системе возможны вариации гравитационной постоянной в соответствии с ГБЧ Дирака, а при измерениях, осуществляемых в гравитационной системе, мы могли бы получить эволюцию масс всех частиц [3, 46]. Практически мы имеем только первую возможность, так как современные эталоны определены в атомной системе единиц и к ним привязаны соответствующие измерительные средства [184, 185].

В гл. 2 изложена теория гравитации с конформным хиггсовским полем, которая, с одной стороны, не противоречит современным классическим тестам теорий гравитации, а с другой — допускает интерпретацию вариаций констант в рамках упомянутой выше концепции. По нашему мнению, ее также необходимо учитывать в сценариях эволюции Вселенной, что мы и делали. Что касается других сценариев, предложенных в последние два года и основанных на использовании однопетлевых поправок в тензоре энергии-импульса, то следует учесть следующее [186].

В общем случае нестационарного пространства-времени (например, в космологии) при задании вакуумного состояния на произвольной гиперповерхности Коши Σ тензор энергии-импульса квантованного поля $\langle T \rangle$ содержит не только локальные, но и нелокальные, зависящие от Σ расходимости. В однородных космологических моделях при задании Σ в виде $t = \text{const}$ можно исключить нелокальные расходимости, выбирая вакуум из некоторого класса состояний $\mathcal{R}$. В общем случае (кроме полей с конформной связью в конформно-плоской метрике) вакуум, выбранный по условию диагонализации мгновенного гамильтониана, не принадлежит $\mathcal{R}$, если Σ не является квазистатической поверхностью.

Локальные расходимости $\langle T \rangle$ не сводятся к геометрическим тензорам типа космологического члена $\Lambda \delta_\mu^\nu$ и тензора Эйнштейна и, следовательно, не устраняются перенормировкой констант в обобщенном гравитационном действии (геометрической структурой обладает лишь логарифмическая часть расходимостей). Поэтому последовательная перенормировка $\langle T \rangle$ достигается лишь методом Паули—Вилларса. Этот результат подтвержден анализом размерной регуляризации в метрике Фридмана, а также новым методом регуляризации — ковариантным сглаживанием δ -функции.

Таким образом, учет квантовых эффектов в теории гравитации и анализ проблемы вариаций констант с необходимостью приводят к обобщениям теории Эйнштейна. Кроме того, на передний план выдвигается проблема объединения гравитационного и других физических взаимодействий. В этом направлении уже имеется ряд интересных работ, на которых мы не останавливались. В частности, в [187] впервые рассмотрена теория Вайнберга—Салама с учетом собственного гравитационного поля и получено, что формирование реального спектра масс частиц возможно лишь в гравитационных полях с конформными

аномалиями. В [188] показано, что эта теория в отличие от стандартной теории не содержит свободных параметров, которые в данном случае связаны с кривизной и поэтому могут быть определены. Наконец, эти же авторы впервые получили точное решение типа магнитного монополя в собственном гравитационном поле в рамках калибровочной теории поля. В частности, показано, что масса гравитационного магнитного монополя может иметь верхнюю границу порядка массы планкеона. Возможно, этим объясняются отрицательные результаты экспериментов на баксанской установке по поиску монополей. Верхняя граница масс хиггсовских бозонов — планковская масса — получена нами в [52, 128].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. М.: Наука, 1965.
2. Dyson F. — In: Aspects of Quantum Theory. Lond.: Cambridge Univ. Press, 1972, p. 213.
3. Мельников В. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 7. М.: Атомиздат, 1976, с. 190; Калинин М. И., Мельников В. Н. — Там же, вып. 6, 1975. с. 70.
4. Eagles D. M. — Intern. J. Theor. Phys., 1976, vol. 15, № 4, p. 265.
5. Eddington A. S. Fundamental Theory. Lond.: Cambridge Univ. Press, 1948.
6. Бронников К. А., Мельников В. Н., Станюкович К. П. Препринт ИТФ АН УССР, 68—69. Киев, 1968; В кн.: Проблемы гравитации. Тр. V Междунар. конф. по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1976, с. 43.
7. Бронников К. А., Мельников В. Н. Препринт ВНИИОФИ, 70-2. М., 1970.
8. Мельников В. Н., Решетов В. А. — В кн.: Тез. докл. VIII Всесоюз. конф. по теории элементарных частиц (Ужгород). Киев: Изд-во ИТФ АН УССР, 1971, с. 117.
9. Wheeler J. — Ann. Phys., 1967, vol. 2, p. 604.
10. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
11. Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1966, с. 267.
12. Markov M. A. — Progr. Theor. Phys. Suppl., 1965, Extra Number, p. 85.
13. Cohen E. R., Taylor B. N. — J. Phys. Chem. Data, 1973, vol. 2, p. 663.
14. Линде А. Д. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 320.
15. Dirac P. A. M. — Nature, 1937, vol. 139, p. 323; Proc. Roy. Soc., 1938, vol. A165, p. 199.
16. Brans C., Dicke R. — Phys. Rev., 1961, vol. 124, p. 925.
17. Morganstern R. — Nature, 1971, vol. 232, p. 109; Nature Phys. Sci., 1972, vol. 237, № 74, p. 70.
18. Gamov G. — Phys. Rev. Lett., 1967, vol. 19, p. 759.
19. Teller E. — Phys. Rev., 1948, vol. 73, p. 81.
20. Ландау Л. Д. — В кн.: Нильс Бор и развитие физики. Пер. с англ. М.: Мир, 1955, с. 75.
21. De Witt B. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol. 13, p. 114.
22. Станюкович К. П. Препринт ВНИИОФИ, 70-13. М., 1970; В кн.: Теория относительности и гравитация. М.: МОИП, 1971, с. 33.
23. Salam A., Strathdee J. — IEAA Preprint IC/70/38. Trieste, 1970.
24. Станюкович К. П. В кн.: Проблемы гравитации и элементарных частиц. Труды ВНИИФТРИ. Вып. 16 (46). М., 1972. с. 125.
25. Bahcall J. N., Schmidt M. — Phys. Rev. Lett., 1967, vol. 19, p. 1294.
26. Baum W. A., Florentin-Nielsen R. — Astrophys. J., 1976, vol. 209, № 2, p. 1, 319.
27. Wolf A. M., Brown R. L., Roberts M. S. — Phys. Rev. Lett., 1976, vol. 37, № 4, p. 179.
28. Колосницын Н. И., Пушкин С. Б., Пурто В. М. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 7. М.: Атомиздат, 1976, с. 208.
29. Домнин Ю. С., Кошеляевский Н. Б., Татаренков В. М. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 269, 273.

30. Шляхтер А. И. Препринт ЛИЯФ, № 260. Л., 1976; Nature, 1976, vol. 264, № 5584, p. 340.
31. Davies P. — J. Phys., 1972, vol. A5, p. 1296.
32. Van Flandern T. C. — Ann. N. Y. Acad. Sci., 1975, vol. 262, p. 494; In: Abstracts 2nd Intern. Conf. on Precision Measurements and Fundamental Constants. Boulder NBS USA, 1981, p. 220.
33. Williams J. G. — Phys. Rev. Lett., 1976, vol. 36, p. 554.
34. Reasenberg R. D., Shapiro I. I. — In: Atom Masses and Fundamental Constants. Vol. 5, N. Y., 1976, p. 643.
35. Mansfield V. N. — Nature, 1976, vol. 261, № 5561, p. 560.
36. Blake G. M. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1977, vol. 178, № 2, p. 41.
37. McElhinny M. W., Taylor S., Stevenson D. — Nature, 1978, vol. 271, p. 316.
38. Станюкович К. П., Мельников В. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 9. М.: Атомиздат, 1978, с. 3.
39. Dirac P. A. M. — Proc. Roy. Soc., 1974, vol. A338, p. 439.
40. Bekenstein J. D. — Phys. Rev., 1977, vol. D15, № 6, p. 1458; Comm. Astrophys., 1979, vol. 8, № 4, p. 89.
41. Muller P. M. — Intern. Rep., Jet. Prop. Lab., Pasadena, USA, 1976.
42. Dirac P. A. M. — Proc. Roy. Soc., 1979, vol. A365, p. 19.
43. Gamov C. — Proc. Nat. Acad. Sci., 1967, vol. 57, p. 187.
44. Davis Jr. R. — Bull. Amer. Phys. Soc., 1972, vol. 17, p. 527.
45. Canuto V., Adams P., Hsieh S. e. a. — Phys. Rev., 1977, vol. D16, № 6, p. 1643.
46. Зайцев Н. А., Мельников В. Н. Докл. на Всесоюз. симп. по актуальным проблемам гравитации. (ВНИИФТРИ, М., июль 1977 г.). — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1979, с. 131; Abstracts 9th Intern. Conf. Gen. Relat. Gravit. Iena, 1980, p. 499.
47. Dirac P. A. M. — Proc. Roy. Soc., 1973, vol. A333, p. 403.
48. Canuto V., Hsieh S. H. — Astrophys. J., 1978, vol. 224, p. 302.
49. Dirac P. A. M. — In: Theories and Experiments in High Energy Physics. N. Y., 1975, p. 443.
50. Canuto V. e. a. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1979, vol. 188, p. 829.
51. Canuto V., Hsieh S. — Astrophys. Suppl., 1979, vol. 41, p. 243; Canuto V, Hsieh S., Owen J. — Ibid., p. 263; Canuto V., Owen J. — Ibid., p. 301.
52. Мельников В. Н. — Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 6, с. 1351; В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 11. М.: Атомиздат, 1980, с. 164.
53. Мельников В. Н., Якимов В. Е. — В кн.: Тез. докл. 5-й Сов. гравитац. конф. М.: МГУ, 1981, с. 127.
54. Мельников В. Н. Abstracts 9th Intern. Conf. Gen. Relat. Gravit. Iena, 1980, p. 497.
55. Зайцев Н. А., Колесников С. М., Радынов А. Г. — В кн.: Тез. докл. 3-й Сов. гравитац. конф. Ереван, 1972, с. 384.
56. Станюкович К. П. Abstracts 9th Intern. Conf. Gen. Relat. Gravit. Iena, 1980, p. 589.
57. Stanukovich K. P., Melnikov V. N., Bronnikov K. A. — Intern. J. Theor. Phys., 1981, vol. 20, № 11, p. 831.
58. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980.
59. Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 2. М.: Атомиздат, 1969. с. 5, 40.
60. Чечев В. П., Крамаровский Я. М. Радиоактивность и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1978.
61. Розенталь И. Л. Препринт ИКИ № 524. М., 1979; № 554, М., 1980; Успехи физ. наук, 1980, т. 131, № 2, с. 239.
62. Бочарова Н. М., Бронников К. А., Мельников В. Н. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астроном., 1970, № 6, с. 706.
63. Тагиров Э. А., Черников Н. А. Препринт ОИЯИ Р2-3777. Дубна, 1968.
64. Бронников К. А., Тагиров Э. А. Препринт ОИЯИ Р2-4151. Дубна, 1968.

65. Асанов Р. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1967, т. 53, № 2, с. 570.
66. Зайцев Н. А., Колесников С. М. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 4. М.: Атомиздат, 1970, с. 24.
67. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967.
68. Арновитт Р., Дезер С., Мизнер С. — В кн.: Эйнштейновский сборник. М.: Наука, 1967, с. 233.
69. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969.
70. Бронников К. А., Мельников В. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 5. М.: Атомиздат, 1974, с. 80.
71. Фишер И. З. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1948, т. 18, с. 636.
72. Penney R. — Phys. Rev., 1969, vol. 182, p. 1383.
73. Зайцев Н. А., Колесников С. М., Радынов А. Г., Станюкович К. П. Препринты ВНИИОФИ 70-10. М., 1970; ИТФ АН УССР 72-21.Р. Киев, 1972.
74. Wagoner R. — Phys. Rev., 1970, vol. D1, p. 3209.
75. Солодов А. А. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 5. М.: Атомиздат, 1974, с. 92.
76. Hockyo N. — Progr. Theor. Phys., 1971, vol. 46, p. 984.
77. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971.
78. Бронников К. А., Мельников В. Н., Павлов Н. В. — В кн.: Новейшие проблемы гравитации. М.: ВНИИФТРИ; 1973, с. 142.
79. Блохинцев Д. И. — В кн.: Тез. докл. 1-й Сов. гравитац. конф. М.: Изд-во МГУ, 1961, с. 90.
80. Станюкович К. П. — Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 4, с. 789; 1966, т. 168, № 4, с. 781.
81. Пирагас К. А. — В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1967, с. 183.
82. Мельников В. Н., Бронников К. А. — В кн.: Тез. докл. 4-й Всесоюз. конф. по геометрии. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1969, с. 167.
83. Лифшиц Е. М., Берестецкий В. Б. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1968.
84. Зельманов А. Л. Физический энциклопедический словарь. Т.2. М.: Сов. энциклопедия, 1963, с. 491.
85. Зельдович Я. Б. — Успехи физ. наук, 1968, т. 95, № 1, с. 209.
86. Bronnikov K. A., Melnikov V. N. Preprint ITF-69-21. Kiev, 1969.
87. Станюкович К. П. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астроном., 1968, № 2, с. 17.
88. Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 2. М.: Атомиздат, 1969, с. 33.
89. Wheeler J. Einstein Vision. Berlin: Springer, 1968.
90. Марков М. А. Препринт ОИЯИ P2-4050. Дубна, 1968.
91. Bronnikov K. A., Melnikov V. N., Shikin G. N., Stanukovich K. P. — Ann. Phys. N. Y., 1979, vol. 118, № 1, p. 84.
92. Бронников К. А., Мельников В. Н., Шикин Г. Н. — Изв. вузов. Сер. физ., 1978, № 11, с. 69.
93. Бронников К. А., Шикин Г. Н. — Изв. вузов. Сер. физ., 1977, № 9, с. 25.
94. Бронников К. А., Шикин Г. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 9. М.: Атомиздат, 1978, с. 55.
95. Бронников К. А. — В кн.: докл. 4-й Сов. гравитац. конф. Минск: Изд-во ИФ АН БССР, 1976, с. 288; Изв. вузов. Сер. физ., 1977, № 10, с. 51. (с Ходуновым А. В.); Gen. Relat. Gravit., 1978, vol. 9, p. 271.
96. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.
97. Ohanian H. — Ann. Phys. N. Y., 1971, vol. 67, p. 648.
98. Радынов А. Г., Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. М.: Ун-т Дружбы Народов, 1978.
99. Bronnikov K. A., Kireev Yu. N. — Phys. Lett., 1978, vol. A67, p. 95.
100. Wheeler J. — Rev. Mod. Phys., 1962, vol. 34, p. 873.
101. Шикин Г. Н. — В кн.: Теория относительности и гравитация. М.: Наука, 1976, с. 129.

102. Фишер И. З. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1948, т. 18, с. 668.
103. Hofstadter R. — Rev. Mod. Phys., 1956, vol. 28, p. 214.
104. Барабаненков Ю. Н., Мельников В. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1977, с. 85.
105. De Witt B. — Phys. Rev., 1967, vol. 160, p. 1113.
106. Дирак П. А. Лекции по квантовой механике: Пер. с англ. М.: Мир, 1968.
107. Барабаненков Ю. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Тр. ВНИИФТРИ, Вып. 16 (46). М., 1972, с. 34.
108. Барабаненков Ю. Н., Озрин В. Д. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 7. М.: Атомиздат, 1976, с. 12.
109. Като Т. Теория возмущений линейных операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
110. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1963.
111. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
112. Барабаненков Ю. Н., Пилипенко В. А. Препринт ВНИИОФИ 70-3. М., 1970.
113. Барабаненков Ю. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. — Тр. ВНИИФТРИ. Вып. 16 (46). М., 1972, с. 49.
114. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967.
115. Терлецкий Я. П. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1937, т. 7, с. 1290.
116. Калинин М. И., Мельников В. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Тр. ВНИИФТРИ. Вып. 16 (46). М., 1972, с. 43.
117. Кречет В. Г., Шикин Г. Н. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1979, с. 91.
118. Ryan M. Hamiltonian Cosmology. Berlin: Springer, 1972.
119. Blyth W., Isham C. — Phys. Rev., 1975, vol. D11, № 4, p. 768; Berger B. — Ibid., № 11, p. 2770; Kaup D., Vitello A. — Ibid., 1974, vol. 9, № 6, p. 1648; Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Кречет В. Г. — Изв. вузов. Сер. физ., 1977, № 7, с. 113.
120. Барвинский А. О., Пономарев В. Н., Кречет В. Г. — Там же, № 5, с. 81; Лапчинский В. Г., Рубаков В. А. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1979, с. 99.
121. Мельников В. Н., Орлов С. В. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 13. М.: Энергоиздат, 1982, с. 111.
122. Parker L., Fulling S. — Phys. Rev., 1973, vol. D7, p. 2357.
123. Старобинский А. А. — Письма в АЖ, 1978, т. 4, с. 155.
124. Вейнберг С. Гравитация и космология: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
125. Brout R., Englert F., Gunzig E. — Ann. Phys., 1978, vol. 115, p. 78.
126. Барабаненков Ю. Н., Мельников В. Н., Станюкович К. П. — В кн.: Современные проблемы ОТО. Тр. Ин-та физики АН БССР. Минск, 1979, с. 169.
127. Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Теорет. и мат. физ., 1978, т. 37., с. 347.
128. Мельников В. Н., Орлов С. В. — [126], с. 159; Phys. Lett., 1979, vol. A70, № 4, p. 263; Изв. вузов. Сер. физ., 1980, № 7, с. 17.
129. Мельников В. Н., Николаенко В. М., Шикин Г. Н. — В кн.: Динамика сплошной среды в Космосе и на Земле. М.: Изд-во ВАГО АН СССР, 1978, с. 3.
130. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
131. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
132. Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Теорет. и мат. физ., 1977, т. 33, с. 42.
133. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология: Пер. с англ. М.: Наука, 1974.
134. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.
135. Domokos G. DESY preprint 76/24. Gamburg, 1976.

136. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
137. Parker L. — Phys. Rev. Lett., 1968, vol. 21, № 8, p. 562; Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, с. 443; Гриб А. А., Мамаев С. Г. — Ядерная физика, 1969, т. 10, с. 1276; Мостепаненко М. В. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 9. М.: Атомиздат, 1978, с. 7; Chitre D., Hartle J. — Phys. Rev., 1977, v. 16, № 2, p. 251.
138. Schafer G., Dehnen H. — Astron. Astrophys., 1977, v. 54, p. 823.
139. Obregon O., Pimentel I. — Gen. Relat. Gravit., 1978, vol. 9, № 7, p. 585.
140. Бронников К. А., Мельников В. Н. Abstracts 9th Intern. Conf. Gen. Relat. Gravit. Iena, 1980, p. 546; В кн.: Дискуссионные вопросы ОТО. М.: Наука, 1982, с. 127.
141. Николаенко В. М. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 9. М.: Атомиздат, 1978, с. 46; Гурович В. Ц., Старобинский А. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1979, ст. 77, с. 1683; Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., — Там же, 1980, т. 78, с. 22.
142. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распад в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1974.
143. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. — Ядерная физика, 1976, т. 23, с. 1118.
144. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. — Там же, 1978, т. 28, № 6 (12), с. 1640.
145. Амбарцумян В. А. Научные труды. Т.1, 2. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960; Амбарцумян В. А., Саакян Г. С. — Астрон. журн. 1960, т. 37, с. 193.
146. Воронцов-Вельяминов Б. А. — В кн.: Тр. 6-го совещ. по вопросам космологии. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 19.
147. Станюкович К. П. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астрон., 1968, № 5, с. 3; Тр. 5-го съезда ВАГО. М.: Изд-во ВАГО АН СССР, 1974, с. 55.
148. Гоняев В. В. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 12. М.: Атомиздат, 1981, с. 23.
149. Менский М. Б. Препринт ВНИИОФИ 70-8. М., 1970.
150. Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 5. М.: Атомиздат, 1974, с. 123.
151. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.
152. Станюкович К. П., Мельников В. Н. — В кн.: Горение и взрыв в Космосе и на Земле. М.: Изд-во ВАГО АН СССР, 1980, с. 20; В кн.: Тез. докл. 5-й Сов. гравитац. конф. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 182.
153. Станюкович К. П., Степанов Б. М., Бурлаков В. Д. и др. — В кн.: Проблемы теории и гравитации элементарных частиц. Вып. 2. М.: Атомиздат, 1969, с. 5.
154. Станюкович К. П., Мельников В. Н., Бронников К. А. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 12. М.: Атомиздат, 1981, с. 5.
155. Мельников В. Н., Николаев Ю. М., Станюкович К. П. — Астрон. циркул., 1980, № 1138, с. 5.
156. Долгов А. Д., Зельдович Я. Б. — Успехи физ. наук, 1980, т. 130, с. 559.
157. Любимов В. А., Новиков Е. Г., Нозик В. З. и др. Препринт ИТЭФ № 62, М., 1980.
158. Мельников В. Н., Николаев Ю. М., Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 12. М.: Энергоиздат, 1981, с. 12.
159. Мельников В. Н., Николаев Ю. М., Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 13. М.: Энергоиздат, 1982, с. 12.
160. Станюкович К. П. — Там же, вып. 10. 1979. с. 5.
161. Станюкович К. П. — Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 2, с. 326.
162. Станюкович К. П. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 66, № 3, с. 826.
163. Станюкович К. П. — Там же, 1945, т. XIVIII, § 5, с. 331) Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.

164. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
165. Станюкович К. П., Мельников В. Н. — В кн.: Релятивистская астрофизика, космология, гравитационный эксперимент. Минск: Тр. Ин-та физики АН БССР, 1976, с. 111.
166. Станюкович К. П. — В кн. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1977, с. 3.
167. Станюкович К. П., Шаршекеев Р. Ш. — Астрофизика, 1970, т. 6, вып. 4, с. 571; Прикл. мех. и математика, 1973, т. 37, № 4, с. 739.
168. Станюкович К. П. — Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 1, с. 78.
169. Мак-Витти Г. Общая теория относительности: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962, § 33.
170. Станюкович К. П., Иванов М. Ю. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1977, с. 67.
171. Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1979, с. 10.
172. Станюкович К. П. — Докл. АН СССР, 1971, № 3, с. 550; В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 7. М.: Атомиздат, 1976, с. 149.
173. Станюкович К. П. — Вестник МГУ. Сер. физ. и астроном., 1968, № 1, с. 17.
174. Новиков И. Д. — Сообщения Гос. астроном. ин-та им. П. К. Штернберга, 1962, № 120, с. 42.
175. Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1975, с. 6.
176. Zeldovich Ya. B. — Phys. Lett., 1978, vol. 73B, № 4, p. 423.
177. Иваненко Д. Д., Сарданашили Г. А. — Докл. Болг. АН, 1981, т. 34, № 8, с. 1073; Иваненко Д. Д. — Вопросы истории естествознания и техники, 1979, № 3 (67) — 4 (68), с. 3; Иваненко Д. Д., Кречет В. Г. — Изв. вузов. Сер. физ., 1980, № 12, с. 3.
178. Guth A. — Phys. Rev. D., 1981, vol. 23, p. 347, 876.
179. Линде А. Д. Препринт ФИАН № 229. М., 1981.
180. Мурадян Р. М. — Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1977, т. 8, № 1, с. 175.
181. Мельников В. Н., Станюкович К. П. — В кн.: Проблемы статистической физики и теории поля. М.: УДН, 1982, с. 56.
182. Бронников К. А., Шикин Г. Н. — В кн.: Тез. докл. II Всесоюз. совещ. «Гравитация и объединение фундаментальных полей». Киев, 1982.
183. Мельников В. Н., Певцов Г. Д. — Там же.
184. Мельников В. Н., Радынов А. Г. — Там же.
185. Мельников В. Н., Рыдинов А. Г. — В кн.: Квантовая метрология и фундаментальные физические константы. Л.: НПО ВНИИМ, 1982, с. 16.
186. Бронников К. А. — См. [182].
187. Николаенко В. М. — Теорет. мат. физ., 1980, т. 42, № 2, с. 195.
188. Николаенко В. М., Станюкович К. П., Шикин Г. Н. — Там же, 1981, т. 46, № 3, с. 394; GRG, 1982, vol. 14, № 4, p. 379.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Проблема возможных вариаций фундаментальных физических «констант» и связь физических взаимодействий.	11
1.1. Фундаментальные физические константы	11
1.2. Гипотезы о вариациях фундаментальных констант	16
1.3. Экспериментальные данные по вариациям констант	22
1.4. Теории, основанные на связи между вариациями констант и выбором системы единиц	27
1.5. Масштабно-ковариантная теория гравитации Кануто и астрофизические тесты	33
1.6. Теория гравитации с конформным хиггсовским полем	39
1.7. Гравитационный вакуум с учетом вариаций констант и физические взаимодействия	46
Глава 2. Решения с физическими полями в ОТО	52
2.1. Решения со скалярным полем в центрально-симметричной метрике	52
2.2. Решения со статическими скалярными и электромагнитными полями в теории гравитации	58
2.3. Решения со скалярным полем в метрике однородной и изотропной модели. Скалярно-гравитационная модель планкеона	67
2.4. Сверхтяжелые частицы в скалярно-тензорной теории гравитации	76
Глава 3. Взаимодействие скалярного, электромагнитного и гравитационного полей: частицеподобные решения	79
3.1. Критерий частицеподобности	79
3.2. Основные уравнения	81
3.3. Анализ скалярно-электровакуумных решений	84
3.4. Модели частиц с некогерентной материей	87
3.5. Нелинейная электродинамика в ОТО	91
3.6. Системы с прямым взаимодействием скалярного и электромагнитного полей	93
3.7. Несингулярная полевая модель частицы	96
Глава 4. Квантовая космология	97
4.1. Проблемы квантовой космологии	97
4.2. Сравнение методов Дирака и АДМ на примере квантования уравнений геометрической оптики	98
4.3. Соотношение неопределенностей при квантовании фридмановской космологической модели	101
4.4. Квантование фридмановской Вселенной, заполненной скалярным полем	102
4.5. Квантование метрики Фридмана, сшитой с метрикой Крускала	112
4.6. О космологической постоянной в квантовой космологии	115
Глава 5. Самосогласованный учет квантовогравитационных эффектов	118
5.1. Космологические следствия спонтанного нарушения калибровочной симметрии в изотропном мире	118
5.2. Спонтанное нарушение конформной симметрии в искривленном пространстве-времени	130
5.3. Самосогласованный учет спонтанного нарушения P -, CP - и G -симметрий	131
5.4. Космологические модели с учетом рождения частиц	132

5.5. Самосогласованные космологические модели с некогерентным рождением фермионов	142
Г л а в а 6. Элементы теории гравитационного вакуума	146
6.1. Планкеоны как модель гравитационного вакуума	146
6.2. Рождение частиц из планкеонного вакуума	148
6.3. Приложения модели гравитационного вакуума к частицам	153
6.4. Гравитационный вакуум и выделение энергии в микромире	155
6.5. Инерционный нагрев и гравитационный критерий протекания термоядерных реакций	160
Г л а в а 7. Гидродинамические аспекты ОТО	164
7.1. Уравнения движения в ОТО с гидродинамическим тензором материи	164
7.2. Основные уравнения для центрально-симметричного движения среды	170
7.3. Преобразования координат, интервала и принцип соответствия	175
7.4. Общие преобразования для уравнений ОТО в центрально-симметричной системе отсчета	178
7.5. Автомодельные движения в центрально-симметричной метрике	181
7.6. Элементы механики сплошной среды в римановом пространстве при переменном числе частиц и различных источниках энергии	184
Г л а в а 8. Некоторые точные решения в ОТО и их исследование	192
8.1. Решения Шварцшильда и Толмена	192
8.2. О связи метрик Толмена и Шварцшильда	194
8.3. Решения Эйнштейна—Фридмана	203
8.4. Точные решения для автомодельных движений	215
8.5. Точное решение уравнения Оппенгеймера—Волкова для материи с уравнениями состояния $\varepsilon + 3p = 0$, $\varepsilon + 5p = 0$	219
8.6. Стационарные движения во внешнем центрально-симметричном гравитационном поле	220
8.7. О модели де Дондера несжимаемой жидкости в собственном гравитационном поле	222
Г л а в а 9. Некоторые обобщения ОТО	225
9.1. Пятимерие: однородные модели нестационарной Вселенной	225
9.2. Закрытая модель Вселенной при переменной эффективной гравитационной постоянной	227
9.3. Масштабная инвариантность и уравнения гравитационного поля. Уравнения гравитационного поля для Метагалактики	230
9.4. Уравнения космологического и локального гравитационных полей	236
9.5. К вопросу о физической природе гравитации	242
Заключение	244
Список литературы	249

2
6
6
8
3
5

60
64

64

70
75

78
81

84
92
92
94
03
15

19

20

22
25
25

27

30

36
42
44
49



THE CAMBRIDGE ILLUSTRATED HISTORY OF THE WORLD